SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag med bedömningskriteier till kompletteringstentamen 2011-06-21

1. Uppgifter och lösningsförslag

(1) Givet är två plan vars ekvationer ges av $x + y + 2z = 0$ respektive $2x + y + z = 0$. Som synes är planen inte parallella och bägge går genom origo, så skärningen mellan dem blir en linje L som också går genom origo.

(a) Uttryck denna linje L på parameterform. **(3)**

(b) Bestäm projektionen av vektorn $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ på linjen L. **(1)**

Lösning. (a) Linjen L ges som lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 0 \\ 2x + y + z & = 0 \end{cases}$$

Vi utför Gauss-Jordan elimination och erhåller den reducerade trappstegsmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Detta betyder att $z = t$ kan väljas fritt, men att $y = -3t$, och att $x = t$. Linjen L ges som

$$L = \{(t, -3t, t) \mid \text{tal } t\}.$$

(b) För att bestämma projektionen av vektorn $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ på linjen L vill vi använda indreprodukten. Vi har att vektorn $\mathbf{v} = (1, -3, 1)$ är en bas för linjen L. Detta betyder att

$$\mathrm{proj}_L(\mathbf{u}) = \frac{1}{||\mathbf{v}||^2} < \mathbf{u}, \mathbf{v} > \mathbf{v} = \frac{1}{11}(1 - 6 + 1)\mathbf{v} = \frac{4}{11}(1, -3, 1).$$

$\square$

Svar:

(a) $L = \{(t, -3t, t) \mid \text{tal } t\}$.

(b) $\frac{4}{11}(1, -3, 1)$.

(2) Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

representerar en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ med avseende på standardbasen.

(a) Bestäm alla $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^3$ sådana att $T(\mathbf{x}) = (-2, 2, 0)$. **(2)**

(b) Bestäm en vektor $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^3$ som inte är med i bilden (eng. *range*) av T. **(2)**

Lösning. (a) För att bestämma $\mathbf{x}$ sådan att $T(\mathbf{x}) = (-2, 2, 0)$ måste vi bestämma lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y - 4z &= -2 \\ 2x + 3y + z &= 2 \\ 3x + 2y - 3z &= 0 \end{cases}$$

Vi sätter upp totalmatrisen och utför Gauss-Jordan elimination. Den reducerade trappstegsmatrisen blir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{9}{5} & \frac{6}{5} \end{array}\right].$$

Detta betyder att $z = t$, med parameter t, och att $y = \frac{6}{5} - \frac{9}{5}t$ och $x = -\frac{4}{5} + \frac{11}{5}t$.

(b) För att bestämma en vektor $\mathbf{y}$ som inte är med i bilden av T, bestämmer vi först bilden. Vi har att bilden till T ges som det linjära höljet till kolumnvektorerna i matrisen A. Vi gör Gauss-Jordan på dessa kolumnvektorer för att bestämma en bas för bilden. Gauss-Jordan på matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

ger den reducerade trappstegsformen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Detta betyder att vektorerna

$$\mathbf{u} = (1, 0, 1) \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = (0, 1, 1)$$

är en bas för bilden till T. En vektor $\mathbf{y}$ som inte kan skrivas som en linjär kombination $t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ är t.ex. $\mathbf{y} = (1, 1, 1)$.

□

Svar:

(a) $\{(-\frac{4}{5} + \frac{11}{5}t, \frac{6}{5} - \frac{9}{5}t, t) \mid \text{tal } t\}$.

(b) T.ex. $\mathbf{y} = (1, 1, 1)$.

(3) Betrakta planet W i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen $x - y + z = 0$.

(a) Bestäm en ortogonal bas $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ för $\mathbb{R}^3$, där $\mathbf{w}$ är ortogonal mot W. **(2)**

(b) Bestäm koordinaterna för vektorn $(1, 3, 2)$ med avseende på basen B. **(2)**

Lösning. (a) Vi har att vektorn $\mathbf{w} = (1, -1, 1)$ är normal till planet W. Därför behöver vi enbart bestämma en ortogonal bas för W. Planet W ges som nollställemängden till ekvationen $x - y + z = 0$. Gauss-Jordan elimination på detta ekvationssystem ger basen $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ och $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 1)$. Denna är inte ortogonal. För att konstruera en ortogonal bas väljer vi $\mathbf{u}$ som en vektor i basen. Den andra vektorn $\mathbf{v}_2$ konstruerar vi från vektorn $\mathbf{v}_1$ som

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v_1} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1).$$

Vi beräknar $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1) = \frac{1}{2}(-1+0+0)\mathbf{u} = -\frac{1}{2}(1,1,0)$. Detta ger $\mathbf{v}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$..
Vi väljer $\mathbf{v} = (-1,1,2)$. En ortogonal bas är $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}\}$.

(b) För att bestämma koordinaterna till vektorn $\mathbf{x} = (1,3,2)$ i basen B använder vi projektionsformeln. Vi har att $< \mathbf{x}, \mathbf{u} >= 4$, $< \mathbf{x}, \mathbf{v} >= 6$ och att $< \mathbf{x}, \mathbf{w} >= 0$. Vi har vidare att $||\mathbf{u}||^2 = 2$ och att $||\mathbf{v}||^2 = 6$. Detta ger

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \frac{<\mathbf{x},\mathbf{u}>}{||\mathbf{u}||^2} \\ \frac{<\mathbf{x},\mathbf{v}>}{||\mathbf{v}||^2} \\ \frac{<\mathbf{x},\mathbf{w}>}{||\mathbf{w}||^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Med andra ord att $(1,3,2) = 2\mathbf{u} + \mathbf{v} + 0$.

$\square$

Svar:

(a) T.ex. $\{(1,1,0), (-1,1,2), (1,-1,1)\}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

2. BEDÖMNINGSKRITERIER

Mindre räknefel ger i allmänhet inget avdrag om de inte väsentligt ändrar uppgiftens karaktär. Presentationen av lösningen av varje uppgift bedöms enligt följande:

- För full poäng krävs bra förklarande text till alla formler och beräkningar.
- Om förklarande text saknas helt ges högst två poäng på uppgiften.

(1) (a) Det ges 2 poäng om studenten sätter upp ekvationssystemet för linjen L. Sedan ges det ytterligare en poäng om man från den reducerade trappstegsformen erhåller korrekt parameterform för lösningsmängd.
  - Korrekt ekvationssystem, **2 poäng**.
  - Korrekt parameterform, **1 poäng**.

(b) Det ges 1 poäng för korrekt använding av projektionsformel. Mindre räknefel ger inga poängavdrag.
  - Korrekt projektionsformel, **1 poäng**.

(2) (a) Det ges en poäng om korrekt ekvationssystem ställs upp. Ytterligare en poäng om ekvationssystemet löses, och från den reducerade trappstegsformen beskrivs lösningsmängden korrekt.
  - Korrekt ekvationssystem, **1 poäng**.
  - Korrekt lösningsmängd, **1 poäng**.

(b) Om bildmängden beskrivs som linjära höljet till kolumnvektorerna i matrisen A så erhålles en poäng. En poäng ges också om en vektor $\mathbf{y}$ som inte ligger i bildmängden hittas och förklaring till varför vektorn inte ligger i bildmängden ges.
  - Bildmängd som kolumnrum, **1 poäng**.
  - Vektor med förklaring, **1 poäng**.

(3) (a) En poäng om en bas för W bestäms. Ytterligare en poäng om en ortogonal bas för $\mathbf{R}^3$ med efterfrågad egenskap bestäms.
- Bas för W, **1 poäng**.
- Korrekt ortogonal bas, **1 poäng**.

(b) En poäng om det framgår att koordinatmatris är lösning till ekvationen $(1, 3, 2) = r\mathbf{u} + s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$. Ytterligare en poäng om dessa koordinater bestäms.
- Korrekt ekvationssystem, **1 poäng**.
- Koordinater bestäms, **1 poäng**.