KTH Matematik
Hans Thunberg
SF1661 Perspektiv på matematik

Workshop om delbarhet och primtal.

1. Udda och jämnt

Uppgift 1. Vad menar vi med att ett positivt heltal är ett *jämnt* tal? Försök formulera en precis definition.

Uppgift 2. Vad menar vi med att ett positivt heltal är ett *udda* tal? Försök formulera en precis definition.

Uppgift 3. Begrunda dina definitioner av jämna respektive udda tal — är det klart att varje positivt heltal är antingen udda eller jämnt utifrån dina definitioner?

Diskutera först inom er grupp om definitionerna av udda och jämna tal, stäm sedan av med er lärare innan ni går vidare.

Uppgift 4. Bevisa att summan av två jämna tal är ett jämnt tal. Hur är det med summan två udda tal? Eller summan av ett udda och ett jämnt? Bevisa dina påståenden.

Uppgift 5. Formulera och bevisa påståenden om produkten av två jämna, två udda respektive ett udda och ett jämnt tal.

2. Delbarhet

Definition. Om m och n är positiva heltal säger vi att m *delar* n om det finns ett positivt heltal k sådant att $n = km$. Att m delar n skrivs också

$$m|n.$$

Vi säger synonymt också att m är en *faktor*, eller en *delare*, i n.

Vi kan nu definera begreppet jämnt tal genom att säga att $n > 0$ är jämnt om och endast om $2|n$, dvs att $n = 2k$ för något heltal k.

Uppgift 6
a) Är det sant att $5|20$? b) Är det sant att $7|68$?
c) För vilka positiva heltal n gäller det att $1|n$?
d) För vilka positiva heltal n gäller det att $n|n$?

Uppgift 7. a) Visa att om n är positivt heltal sådant att $4|n$, så gäller också att $4|(n+4)$.
b) Visa att om n är positivt heltal sådant att $6|n$, så gäller också att $6|(n+2)(n+3)$.

3. Primtal

Definition. Vi säger att ett heltal $p \geq 2$ är ett *primtal* om det inte har några andra delare än 1 och p.

Uppgift 8. Dela upp följande tal i primfaktorer, d v s skriv dem som en produkt av primtal.
a) 78 b) 103 c) 150 d) 431 e) 2400

Uppgift 9. Förklara varför vi kan vara säkra på att varje heltal ≥ 2 kan skrivas som en produkt av primtal.

Exempel. När vi delar upp ett tal i primfaktorer kan vi i många fall ta olika vägar, till exempel

$$220 = 2 \cdot 110 = 2 \cdot 2 \cdot 55 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \quad \text{eller} \quad 220 = 10 \cdot 22 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11.$$

Kankse tog också du och dina kamrater olika vägar när ni primfaktoriserade talen i uppgift 8?

Lite experimenterande får en att tro att det inte spelar någon roll vilken väg vi väljer, uppdelningen i primfaktorer blir ändå alltid densamma. Detta är faktistk sant, vilket uttrycks i satsen

Sats. Varje heltal större än 1 kan kan skrivas som en produkt av primtal på ett och endast ett sätt (borsett från faktorernas ordning).

Beviset för denna sats ligger utanför denna kurs (men tas upp i kursen Diskret Matematik under vårterminen). Påståendet i satsen kanske känns självklart, men om man begrundar ett stort tal är det kanske inte så självklart ändå - är det till exempel uppenbart att 13242653496007891274898347914738 kan skrivas som en produkt av primtal på ett och endast ett sätt?

4. Primtalen är oändligt många

Sats. Det finns oändligt många primtal.

Denna sats har ett klassiskt bevis, som finns återgivet i *What is mathematics?*. Beviset bygger på ett par enkla idéer[1].

Uppgift 10. Om n är ett positivt heltal gäller att n och $n+1$ inte har någon gemensam delare förutom talet 1. Bevisa detta!
(Om du är bekant med begreppet största gemensamma delare, SGD, säger påståendet att $\text{SGD}(n, n+1) = 1$ för alla heltal $n \geq 1$.)
Förklara också varför detta är detsamma som att säga att två intilliggande positiva heltal tal n och $n+1$ aldrig har någon gemensam primtalsfaktor.

Uppgift 12. Konstruera först ett heltal r som är delbart med primtalen 2, 3, 5 och 11. Konstruera sedan ett heltal $s > r$ som säkert inte är delbart med något av dessa primtal.
Eftersom s inte är delbart med något av tal 2, 3, 5 och 11 måste s bestå av andra primfaktorer, eventuellt en enda om s självt är ett primtal. Eller hur?

Uppgift 12. Låt 2, 3, 5 , 11, 13, ... , 65537 vara en lista av alla primtal ≤ 65537 (som man vet är ett primtal). Konstruera ett tal sådant att alla dess primfaktorer är > 65537 .

Uppgift 13. (Bevis av att det finns oändlig många primtal.) Antag att det bara finns ändligt många primtal $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$. Visa att detta leder till en motsägelse genom att konstruera ett tal som säkert innehåller andra primfaktorer.

5. Tillämpningar av primtalsfaktorisering

När man adderar eller subtraherar bråk gör man ju som bekant det genom att först göra bråken liknämniga. Ett sätt att göra detta på är att ta nämnarnas produkt som gemensam nämnare, sedan utföra berkäningen, och därefter förkorta svaret så långt som möjligt. Här ett exempel.

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{5 \cdot 18}{12 \cdot 18} + \frac{7 \cdot 12}{18 \cdot 12} = \frac{90}{216} + \frac{84}{216} = \frac{174}{216} = \frac{87}{108} = \frac{29}{36}$$

Ett ofta enklare sätt är istället att finna den Minsta Gemensamma Multipeln (MGM) till nämnarna, det vill säga det minsta tal som har

[1]Det här avsnittet har lånat idéer och exempel från kompendiet *Aritmetik*, Matematiska institutionen, Stockholms universitet, skrivet av Christian Gottlieb.

bägge nämnarna som en delare.(MGM kallas i detta sammanhang ofta också MGN, Minsta Gemensamma Nämnare.) Man kan bestämma MGM till två tal genom att studera deras primfaktorisering. Eftersom

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

ser vi att det det räcker att förlänga det första bråket med 3 och det andra med 2 för att få en gemensam nämnare, det vill säga

$$\mathrm{MGM}(12, 18) = 3 \cdot 12 = 2 \cdot 18 = 36.$$

Beräkningen av summan blir då det något enklare

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{15}{36} + \frac{14}{36} = \frac{29}{36}.$$

Uppgift 14. Beräkna

$$\text{a)} \quad \frac{4}{45} + \frac{11}{60} \qquad \text{b)} \quad \frac{11}{84} - \frac{13}{315}.$$

Uppgift 15. Formulera en regel som beskriver primfaktorerna till $\mathrm{MGM}(n, m)$ till två tal m och n i termer av primfaktorerna till n och m.

Vi nämner slutligen begreppet Största Gemensamma Delare $\mathrm{SGD}(n, m)$ till två positiva heltal n och m. Som framgår av namnet är talet $d = \mathrm{SGD}(n, m)$ en delare till såväl n som m, närmare bestämt det största talet med denna egenskap.

Uppgift 16. Bestäm största gemensamma delaren till 84 och 315 genom att studera deras primfaktorisering. Förkorta sedan $\frac{84}{315}$ så långt som möjligt.

För stora tal, där primfaktorisering är mödosamt, finns en annan metod (Euklides algortim) för att beräkna SGD. Mer om detta i kursen Diskret matematik.

Uppgift 17. Kan du finna en ekvation som ger ett samband mellan två tal m och n samt $\mathrm{MGM}(n, m)$ och $\mathrm{SGD}(n, m)$?