

September 1, 2014

SF1666/1667

Innehållet:

- linjen \mathbb{R} , planet \mathbb{R}^2 , rummet \mathbb{R}^3 , och vektor rummet \mathbb{R}^n .
- punkter och vektorer i planet, rummet, och \mathbb{R}^n .

1. Linjen, planet, rummet, och vektor rummet \mathbb{R}^n .

• Ett reell tal kallas också för en skalär. Mängden av alla reella tal betecknas med \mathbb{R} och kallas för linjen.

- Ett par av reella tal betecknas med (a, b) eller $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, där a och b är reella tal.

Mängden av alla par av reella tal betecknas med \mathbb{R}^2 och kallas för planet.

- Ett trippel av reella tal betecknas med (a, b, c) eller $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, där a , b , och c är reella

tal. Mängden av alla trippel av reella tal betecknas med \mathbb{R}^3 och kallas för rummet.

- En sekvens av n reella tal betecknas med (x_1, x_2, \dots, x_n) eller $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, där x_1, x_2, \dots, x_n

är reella tal. Mängden av alla n -sekvenser av reella tal betecknas med \mathbb{R}^n och kallas för vektor rummet av dimension n .

2. Punkter och vektorer i planet. En punkt eller en vektor i planet är bara ett element av planet, dvs ett par av reella tal. Skillnad mellan en punkt och en vektor är geometrisk föreställning. Vi föreställer en opunkt (a, b) i \mathbb{R}^2 som en prick eller litet kors i planet med koordinaterna (a, b) . Punkten med koordinaterna $(0, 0)$ kallas för origo och betecknas med O .

Vi tänker om en vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ som en riktad sträck mellan origo $(0, 0)$ och punkten med koordinaterna (a, b) . Vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ kallas för noll vektor i planet och ofta betecknas med $\vec{0}$.

Vi också använder följande notation:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och kallar $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ för standardbasen i \mathbb{R}^2 .

3. Punkter och vektorer i rummet. Liknade i rummet. En punkt eller en vektor i rummet är bara ett element av rummet, dvs ett trippel av reella tal. Skillnad mellan

en punkt $A = (a, b, c)$ och en vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ är geometrisk föreställning.

Vi tänker om en punkt som en punkt i \mathbb{R}^3 och föreställer den som en prick eller litet kors i rummet med koordinaterna (a, b, c) . Punkten med koordinaterna $(0, 0, 0)$ kallas för origo och betecknas med O .

Vi tänker om en vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ som en riktad sträck mellan origo $(0, 0, 0)$ och

punkten med koordinaterna (a, b, c) . Vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ kallas för noll vektor i rummet och

betecknas med $\vec{0}$.

Vi också använder följande notation:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och kallar $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ för standardbasen i \mathbb{R}^3 .

4. Punkter och vektorer i \mathbb{R}^n . En punkt eller en vektor i vektor rummet \mathbb{R}^n är bara ett element i \mathbb{R}^n , dvs en sekvens av n -reella tal. En punkt i \mathbb{R}^n betecknas med $P = (x_1, \dots, x_n)$. Punkt $(0, \dots, 0)$ kallas för origo och betecknas med O . En vektor i

\mathbb{R}^n betecknas med $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ kallas för noll vektor i \mathbb{R}^n och betecknas

med $\vec{0}$.

Vi också använder följande notation:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och kallar $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ för standardbasen i \mathbb{R}^n .

5. Operationer med vektorer I. Vad kan vi göra med vektorer?

- Vi kan ta **längden** av en vektor. Längden av \vec{v} , betecknas med $|\vec{v}|$. Längden kan beräknas med hjälp av Pythagorean sats som ger:

– i \mathbb{R}^2 . Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. $\|\vec{v}\| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Till exempel $\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

– i \mathbb{R}^3 . Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

$\|\vec{v}\| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Till exempel $\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$.

– i \mathbb{R}^n . Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$. $\|\vec{v}\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$.

En vektor som har längden 1 kallas för **enhetsvektor**. Till exempel $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$ är enhetsvektorer i planet, och $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ är enhetsvektorer i rummet.

Noll vektorn har längden 0.

- Vi kan multiplicera en vektor med ett reellt tal. Låt λ vara ett reellt tal.

– i \mathbb{R}^2 . $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$.

– i \mathbb{R}^3 . $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{bmatrix}$.

– i \mathbb{R}^n . $\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$.

Till exempel, $2 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$, $-3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Märka också att $0\vec{v} = \vec{0}$.

Märka att om $\vec{v} \neq 0$, då $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ är en enhetsvektor (vektor av längden 1).

Hur kan vi föreställa vektor $-\vec{v}$? Rita vektor \vec{v} . Vektor $-\vec{v}$ är den vektor som ligger på samma linjen som \vec{v} , har samma längden som \vec{v} men har motsatt riktning.

- Två vektorer \vec{v} och \vec{w} kallas för **parallella** om det finns ett skalär λ så att $\lambda\vec{v} = \vec{w}$.

6. **Uppgift.**
- Undersöka om vektorer $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -8 \\ 16 \end{bmatrix}$ i \mathbb{R}^2 är parallella.
 - Undersöka om vektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$ i \mathbb{R}^3 är parallella.
7. **Uppgift.** Bestäm alla värde på a so att $\begin{bmatrix} 2a-1 \\ -3 \end{bmatrix}$ är parallell till $\begin{bmatrix} 4 \\ 18 \end{bmatrix}$.

8. Operationer med vektorer II.

- Vi kan addera två vektorer.

– i \mathbb{R}^2 . Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}$. Vi kan föreställa vektor $\vec{v} + \vec{w}$ på följande sätt. Rita parallelogram med vektorer \vec{v} och \vec{w} som två sidor. Då $v + w$ är diagonalen av den parallelogram.

– i \mathbb{R}^3 . Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix}$.

Vi har samma geometriska föreställning av vektor addition i rummet. Rita parallelogram med vektorer \vec{v} och \vec{w} som två sidor. Då $\vec{v} + \vec{w}$ är diagonalen av den parallelogram.

– i \mathbb{R}^n . Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix}$.

- Vi kan subtrahera två vektorer.

– i \mathbb{R}^2 . Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} - \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{bmatrix}$.

– i \mathbb{R}^3 . Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} - \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ v_3 - w_3 \end{bmatrix}$.

– i \mathbb{R}^n . Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} - \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ \vdots \\ v_n - w_n \end{bmatrix}$.

Hur kan vi föreställa vektorn $\vec{v} - \vec{w}$? Vi kan göra detta på två sätt:

- Hitta vektor $-\vec{w}$. Rita parallelogram med sidorna \vec{v} och $-\vec{w}$. Diagonalen av parallelogrammet föreställer $\vec{v} - \vec{w}$.
- Märka att $(\vec{v} - \vec{w}) + \vec{w} = \vec{v}$. Det betyder att vi kan föreställa $\vec{v} - \vec{w}$ på följande sätt. Rita parallelogram med en sida \vec{w} och diagonalen \vec{v} . Den andra sidan av parallelogrammet föreställer $\vec{v} - \vec{w}$.

9. **Proposition.** Längden har följande egenskaper:

- $\|\vec{v}\| \geq 0$ och $\|\vec{v}\| = 0$ om och endast om $\vec{v} = \vec{0}$.
- $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$.
- $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$.

$$\text{Till exempel, } \left\| -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\| = 2 \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\| = 2\sqrt{1+4+9} = 2\sqrt{14}.$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1+4+9} + \sqrt{1+16} = \sqrt{14} + \sqrt{17}$$

Altså:

$$\sqrt{53} \leq \sqrt{14} + \sqrt{17}$$

10. Låt $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vara vektorer och $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vara reella tal. Uttryck:

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_n\vec{v}_n$$

kallas för en **linjär kombination** av vektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ med koefficienter $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

11. **Uppgift.** Bestäm linear kombination av $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ med koefficienterna -1 , 0.5 , och $1/3$.

12. **Uppgift.** Är det sant att alla vektorer i \mathbb{R}^3 kan skrivas som linear kombination av vektorer e_1, e_2 , och e_3 i den standardbasen av \mathbb{R}^3 ?

13. **Operationer med punkter.** Vad kan vi göra med punkter?

- Vektorn mellan två punkter. Om $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ och $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ är punkter i \mathbb{R}^n , kan vi bygga en vektor \vec{PQ} som har koordinaterna $\vec{PQ} =$

$\begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{bmatrix}$. Ibland föreställer vi vektorn \vec{PQ} som en riktad sträck som börjar

i P och slutar i Q . Vi säger att \vec{PQ} är vektorn från P till Q .

Märka att $\vec{PQ} = -\vec{QP}$.

VIKTIG: vi kan inte addera eller subtrahera punkter, eller multiplicera en punkt med ett tal. Vi kan bra ta vektor från en punkt till en annan punkt.

- Vi kan beräkna avståndet mellan två punkter. Avståndet mellan punkter P och Q är definierat som längden av vektor \vec{QP} . Till exempel avståndet mellan $(2, 4)$ och $(-1, 3)$ är $\sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{10}$.

14. **Uppgift.** Hitta koordinaterna av vektor från punkt $(1, 0, -1)$ till $(0, -2, -5)$ och beräkna avståndet mellan punkterna.

15. Operationer med punkter och vektorer.

- Vi kan addera en vektor till en punkt och få en punkt.

– i \mathbb{R}^2 . Låt $P = (p_1, p_2)$ vara en punkt och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ vara en vektor i planet.

Vi definierar $P + \vec{v}$ som en punkt i planet med koordinaterna:

$$P + \vec{v} := (p_1 + v_1, p_2 + v_2).$$

Vi kan föreställa punkten $P + \vec{v}$ på följande sätt: flytta punkten P i riktning av vektor \vec{v} .

Till exempel om $P = (1, -3)$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ då $P + \vec{v}$ är en punkt som har koordinaterna $P + \vec{v} = (-1, 1)$

– i \mathbb{R}^3 . Likadana i rummet. Låt $P = (p_1, p_2, p_3)$ vara en punkt och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

vara en vektor i rummet. Vi definierar $P + \vec{v}$ som en punkt i rummet med koordinaterna:

$$P + \vec{v} := (p_1 + v_1, p_2 + v_2, p_3 + v_3).$$

Vi kan föreställa punkten $P + \vec{v}$ på följande sätt: flytta punkten P i riktning av vektor \vec{v} .

– i \mathbb{R}^n . Låt $P = (p_1, \dots, p_n)$ vara en punkt och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ vara en vektor i

\mathbb{R}^n . Vi definierar $P + \vec{v}$ som en punkt i \mathbb{R}^n med koordinaterna:

$$P + \vec{v} = (p_1 + v_1, \dots, p_n + v_n).$$

Märka att $P + \vec{PQ} = Q$.