LÖSNINGSFÖRSLAG till TENTAMEN 1/A
SF1664

Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder för CFATE1
2014-05-22 kl 14.00-19.00

---

1. Bestäm alla reella tal v som uppfyller ekvationen $\cos v = \sin(5\pi/3)$.

LÖSNING: Vi observerar först att $\sin(5\pi/3) = -\sqrt{3}/2$. Nu har vi:

$$\begin{aligned}\cos v = \sin(5\pi/3) &\iff \cos v = -\sqrt{3}/2 \\ &\iff v = \pm\frac{5\pi}{6} + n2\pi\end{aligned}$$

för godtyckligt heltal n:

Svar: $v = \pm\frac{5\pi}{6} + n2\pi$ för godtyckligt heltal n.

2. Bestäm inversen till funktionen $f(x) = 2 + \ln(4x)$. Ange också inversens definitionsmängd och värdemängd.

LÖSNING: Vi ser att funktionens definitionsmängd består av alla positiva tal medan dess värdemängd är hela $\mathbf{R}$. Därför vet vi att inversen, om den finns, har definitionsmängden $\mathbf{R}$ och värdemängden mängden av alla positiva tal. För att hitta inversen sätter vi $y = 2 + \ln 4x$ och löser ut x. Vi har

$$\begin{aligned}y = 2 + \ln 4x \iff y - 2 = \ln 4x \quad &\iff e^{y-2} = 4x \\ \iff \frac{e^{y-2}}{4} &= x.\end{aligned}$$

Detta betyder att inversen f^{-1} finns och att den ges av $f^{-1}(y) = e^{y-2}/4$, eller, om man hellre vill använda x som variabel, $f^{-1}(x) = e^{x-2}/4$. Definitionsmängden för inversen är alla reella tal och värdemängden är alla positiva reella tal.

Svar: $f^{-1}(x) = e^{x-2}/4$. Definitionsmängden är alla reella tal och värdemängden är alla positiva reella tal.

3. Beräkna nedanstående gränsvärden:

a. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x} + \ln x - x^7}{\sin x + x^6 - 2e^{3x}}$

b. $\lim_{x\to 0} xe^{-1/x^2}$

LÖSNING och svar:

a. Gränsvärdet är $-1/2$ (standardgränsvärde).

b. Gränsvärdet är 0, eftersom båda faktorerna går mot 0.

4. Derivera följande funktioner med avseende på x och ange derivatans definitionsmängd:

a. $f(x) = \tan x$.

b. $g(x) = \dfrac{x}{\arctan x}$

LÖSNING och SVAR:

a. $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ vilket också kan skrivas $1/\cos^2 x$. Definitionsmängd för derivatan är alla $x \neq \pi/2 + n\pi$, n heltal.

b. $f'(x) = \dfrac{\arctan x - \frac{x}{1+x^2}}{(\arctan x)^2}$. Definitionsmängd för derivatan är alla $x \neq 0$.

5. Låt $f(x) = xe^{-x^2/2}$. Bestäm alla lokala extrempunkter till f och avgör deras karaktär (max/min).

LÖSNING: Vi observerar att f är definierad och kontinuerlig för alla reella tal x. Vi deriverar och får

$$f'(x) = e^{-x^2/2} - x^2 e^{-x^2/2} = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$$

som existerar för alla x och är lika med noll om och endast om $x = \pm 1$. Vi teckenstuderar derivatan:

För $x < -1$ är derivatan negativ och funktionen alltså strängt avtagande.

För $-1 < x < 1$ är derivatan positiv och funktionen alltså strängt växande.

För $x > 1$ är derivatan negativ och funktionen alltså strängt avtagande.

Det följer av ovanstående att funktionen har exakt två lokala extrempunkter, ett lokalt minimum i $x = -1$ och ett lokalt maximum i $x = 1$.

SVar: ett lokalt minimum i $x = -1$ och ett lokalt maximum i $x = 1$.

6. Låt $g(x) = x^3 - 12x + 19$. Hur många lösningar har ekvationen $g(x) = 2$? Bestäm en approximation av en lösning med hjälp av en iteration av Newton-Raphsons metod och startvärdet $x_0 = -4$.

LÖSNING: Funktionen g är definierad och kontinuerlig för alla x. Vi deriverar och får $g'(x) = 3x^2 - 12$ som existerar för alla x är lika med noll om och endast om $x = \pm 2$. Vi teckenstuderar derivatan och ser att:

För $x < -2$ är derivatan positiv och funktionen alltså strängt växande.

För $-2 < x < 2$ är derivatan negativ och funktionen alltså strängt avtagande.

För $x > 2$ är derivatan positiv och funktionen alltså strängt växande.

Vi ser att funktionen har att lokalt max i $x = -2$ och ett lokalt min i $x = 2$. Eftersom $g(2) = 3 > 2$ så följer av ovanstående att $g(x) > 2$ för alla $x > -2$. Det betyder att det inte finns någon lösning till $g(x) = 2$ på detta intervall. På intervallet $x < -2$ kan det finnas högst en lösning eftersom g är strängt växande där. Att det också finns minst en lösning följer av att $g(-5) = -46$ och $g(-2) = 35$ och funktionen är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[-5, -2]$ (satsen om mellanliggande värden). Ekvationen $g(x) = 2$ har alltså exakt en lösning.

Vi ser att $g(x) = 2$ är ekvivalent med att $x^3 - 12x + 17 = 0$. Sätt $f(x) = x^3 - 12x + 17$. Vi ska lösa ekvationen $f(x) = 0$ approximativt med en iteration av Newton-Raphsons metod och startvärdet $x_0 = -4$. Eftersom $f(-4) = 1$ och $f'(-4) = 36$ så får vi approximationen

$$x_1 = -4 - \frac{1}{36} = -\frac{145}{36}$$

SVAR: $g(x) = 2$ har exakt en lösning. Lösningen är ungefär $-145/36$.

7. Beräkna integralerna

$$I_1 = \int_1^2 x \ln x \, dx \quad \text{och} \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx$$

med hjälp av partiell integration respektive variabelsubstitution.

LÖSNING:

a. Vi använder partiell integration och får

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = [(x^2/2) \ln x]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} \, dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

b. Vi använder substitutionen $\sin x = t$ (med $\cos x\,dx = dt$ och nya gränser 0 och 1) och får

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,dx = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}.$$

SVAR: $I_1 = 2\ln 2 - 3/4$ och $I_2 = 1/3$.

8. Beräkna exakt eller approximativt integralen

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx.$$

Om du väljer att beräkna integralen approximativt måste du också ange om det skattade värdet är större eller mindre än integralens exakta värde.

LÖSNING: Det går bra att beräkna den exakt med hjälp av partiell integration mm. Vi får

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx. = [x \arcsin x]_0^1 - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} - [-\sqrt{1-x^2}]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

SVAR: $\frac{\pi}{2} - 1$.

9. Beräkna med hjälp av partialbråksuppdelning integralen

$$\int_{-1}^1 \frac{2x-1}{x^2-5x-14}\,dx.$$

LÖSNING: Med hjälp av partialbråksuppdelning får vi

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{2x-1}{x^2-5x-14}\,dx &= \int_{-1}^1 \left(\frac{13/9}{x-7} + \frac{5/9}{x+2}\right)\,dx \\
&= [(13/9)\ln|x-7| + (5/9\ln|x+2|]_{-1}^1 \\
&= (13/9)\ln 6 + (5/9)\ln 3 - (13/9)\ln 8 \\
&= 2\ln 3 - \frac{26}{9}\ln 2.
\end{aligned}$$