



**KTH Elektro-
och systemteknik**

Tentamen i EG2050 Systemplanering, 20 maj 2014, 14:00–19:00, Q24, Q26

Tillåtna hjälpmedel

Vid denna tentamen får följande hjälpmedel användas:

- Miniräknare utan information med anknytning till kursen.
- En **handskriven, enkelsidig** A4-sida med **egna** anteckningar (original, ej kopia).
Denna sida skall lämnas in tillsammans med svarsbladet.

DEL I (OBLIGATORISK)

Skriv alla svar på det bifogade svarsbladet. Några motiveringar eller beräkningar behöver inte redovisas.

Del I kan totalt ge 40 poäng. Godkänt betyg garanteras vid 33 poäng. Om resultatet på del I uppgår till minst 31 poäng ges möjlighet att vid en extra skrivning komplettera till godkänt betyg (E).

Uppgift 1 (4 p)

Besvara följande teorifrågor genom att välja *ett* alternativ, som du anser är korrekt.

a) (1 p) Vilken av följande påståenden tycker du bäst beskriver vilken funktion en balansansvarig har på elmarknaden?

1. En balansansvarig är ansvarig för säker drift av elsystemet.
2. En balansansvarig bygger och underhåller ett region- eller distributionsnät.
3. En balansansvarig är finansiellt ansvarig för systemet under en viss handelsperiod (t.ex. en timme) tillförs lika mycket energi som ens kunder förbrukat.

b) (2 p) Konsumenterna på en bilateral elmarknad har följande valmöjligheter: I) De kan välja vilken systemoperatör de vill ha, II) De kan välja vilken elleverantör de vill ha, III) De kan välja vilken aktör som ska sköta deras balansansvar.

1. Endast I är sant.
2. Endast III är sant.
3. I och II är sanna men inte III.
4. II och III är sanna men inte I.
5. Alla påståendena är sanna.

c) (1 p) Vad gäller för s.k. självbetjäningskontrakt?

1. Kunden köper lika mycket energi per handelsperiod under hela kontraktets giltighetstid.
2. Under kontraktets giltighetstid abonnerar kunden på en viss maximal effekt och får köpa valfri mängd energi per handelsperiod, så länge den maximala effekten inte överskrids.
3. Kunden köper el på elbörsen. Om priset på elbörsen överskrider ett visst avtalat maximalt pris, får kunden en ersättning motsvarande skillnaden mellan börspriset och det avtalade maximala priset.

Uppgift 2 (6 p)

Betrakta den gemensamma elmarknaden för de två länderna Rike och Maa. Antag att det råder perfekt konkurrens, att alla aktörer har perfekt information, samt att det inte finns några magasin-begränsningar eller effektbegränsningar i kraftverken. Elsystemen i Rike och Maa är förbundna via en HVDC-ledning, som maximalt kan överföra 10 TWh per år. Antag att elpriset i Rike är 370 ¢/MWh. Data för kraftverken i Rike och Maa framgår av tabell 1. De rörliga produktionskostnaderna antas vara linjära inom de angivna intervallen; då produktionen är noll är priset på den lägsta nivån och vid maximal produktion är priset maximalt.

Tabell 1 Data för kraftverken i Rike och Maa.

Kraftslag	Produktionskapacitet [TWh/år]		Rörlig produktionskostnad [¢/MWh]
	Rike	Maa	
Vattenkraft	50	10	30–60
Kärnkraft	50	20	100–120
Kolkondens	15	15	300–450
Gasturbiner	5	5	800–1 000

- a) (1 p) Hur mycket producerar vattenkraftverken i Rike?
- b) (1 p) Hur mycket producerar gasturbinerna i Rike?
- c) (2 p) Hur mycket producerar kolkondenskraftverken i Rike?
- d) (2 p) Antag att elförbrukningen i Maa är 50 TWh/år. Vilket elpris får man i Maa?

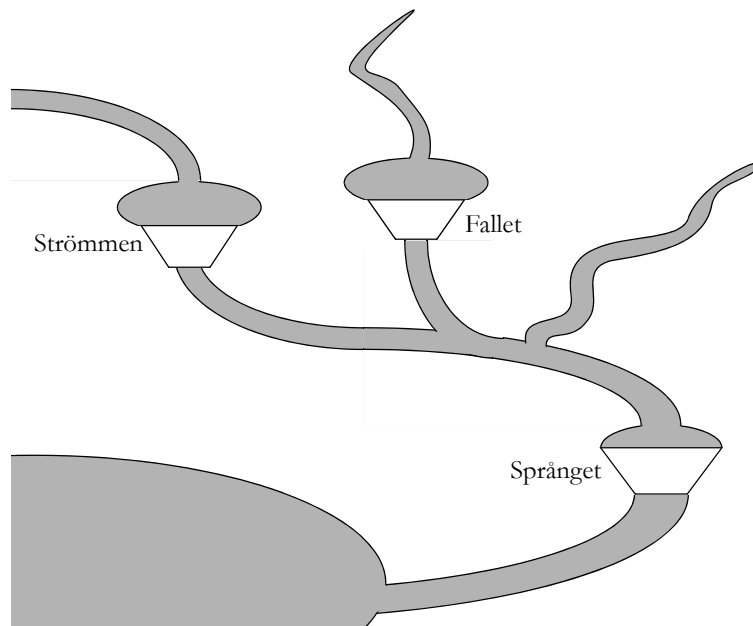
Uppgift 3 (6 p)

Vattenkraftverket Forsen har en installerad effekt på 70 MW. För att undvika skador på turbinerna i kraftverket tillåter man aldrig en lägre elproduktion än 26 MW då kraftverket är i drift. Kraftverket ingår i primärregleringen i Land och har en reglerstyrka på 200 MW/Hz. Klockan 14:00 producerar Forsen 42 MW. De övriga kraftverken i Land som deltar i primärregleringen har en sammanlagd reglerstyrka på 7 800 MW/Hz. Reglerstyrkan för de övriga kraftverken är tillgänglig i frekvensområdet $50 \pm 0,5$ Hz.

Klockan 14:00 är frekvensen i systemet 50,190 Hz. Strax därefter startar ett kärnkraftverk i Land efter ett tidigare driftstopp, vilket innebär att kraftsystemet tillförs ytterligare 1 030 MW.

- a) (3 p) Vad kommer Forsen att producera efter att primärregleringen återställt balansen mellan produktion och konsumtion i systemet?
- b) (3 p) Vilken frekvens får man i Land? Svara med tre decimaler!

Uppgift 4 (12 p)



AB Vattenkraft äger tre vattenkraftverk lokaliserade som i figuren ovan. I ett korttidsplaneringsproblem för dessa kraftverk har man infört följande beteckningar:

Index för kraftverken: Strömmen 1, Fallet 2, Språnget 3.

γ_i = förväntad framtida produktionsekvivalent för vatten lagrat i magasin i ,
 $i = 1, 2, 3$,

λ_t = förväntat elpris timme t , $t = 1, \dots, 24$,

λ_{25} = förväntat elpris efter planeringsperiodens slut,

\bar{M}_i = maximalt innehåll i magasin i , $i = 1, 2, 3$,

$M_{i,0}$ = innehåll i magasin i vid planeringsperiodens början, $i = 1, 2, 3$,

$M_{i,t}$ = innehåll i magasin i vid slutet av timme t , $i = 1, 2, 3$, $t = 1, \dots, 24$,

$\mu_{i,j}$ = marginell produktionsekvivalent för kraftverk i , segment j , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$.

$\bar{Q}_{i,j}$ = maximal tappning i kraftverk i , segment j , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$,

$Q_{i,j,t}$ = tappning i kraftverk i , segment j , under timme t ,
 $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$, $t = 1, \dots, 24$.

$S_{i,t}$ = spill från magasin i under timme t , $i = 1, 2, 3$, $t = 1, \dots, 24$,

$V_{i,t}$ = lokal tillrinning till magasin i under timme t , $i = 1, 2, 3$, $t = 1, \dots, 24$.

a) (4 p) All el som produceras i AB Vattenkrafts kraftverk säljs på den lokala elbörsen ElKräng. Formulera målfunktionsvärdet om syftet med planeringsproblemet är att maximera intäkterna från såld el plus värdet av sparat vatten. Använd beteckningarna ovan.

b) (3 p) Formulera gränserna för de optimeringsvariabler i AB Vattenkrafts korttidsplaneringsproblem som definierats ovan. För att få full poäng på denna uppgift måste du även ange tillåtna indexvärden för varje gräns!

c) (4 p) Den bästa verkningsgraden i vattenkraftverket Språnget erhålls vid tappningen $250 \text{ m}^3/\text{s}$ och produktionsekvivalenten är då $1,00 \text{ MWh/TE}$. Den maximala tappningen i Språnget är $375 \text{ m}^3/\text{s}$ och då är den relativa verkningsgraden 96% . Antag att man vill ta fram en styckvis linjär modell av elproduktionen som funktion av tappningen i Språnget. Modellen ska ha två segment och brytpunkten läggs vid bästa verkningsgrad. Beräkna följande parametrar:

$$\begin{aligned} \mu_{3,j} &= \text{marginell produktionsekvivalent i Språnget, segment } j, \\ \bar{Q}_{3,j} &= \text{maximal tappning i Språnget, segment } j. \end{aligned}$$

d) (1 p) I ett korttidsplaneringsproblem för ett termiskt kraftverk har man infört följande variabler och parametrar:

$$\begin{aligned} C^* &= \text{startkostnad om kraftverket startas efter en timmes driftstopp,} \\ C^{**} &= \text{startkostnad om kraftverket startas efter minst två timmars driftstopp,} \\ G_t &= \text{elproduktion i kraftverket under timme } t, \\ s_t^* &= \text{start av kraftverket under timme } t \text{ efter en timmes driftstopp (1 om kraftverket startas efter en timmes driftstopp, annars 0),} \\ s_t^{**} &= \text{start av kraftverket under timme } t \text{ efter minst två timmars driftstopp (1 om kraftverket startas efter mer än en timmes driftstopp, annars 0),} \\ u_t &= \text{driftstatus under timme } t \text{ (1 om kraftverket är i drift, 0 om det inte är i drift),} \\ \beta &= \text{rörlig produktionskostnad.} \end{aligned}$$

Man har valt följande målfunktion för planeringsproblemet:

$$\text{minimera} \quad \sum_{t \in \mathcal{T}} (\beta G_t + C^* s_t^* + C^{**} s_t^{**}).$$

För att s_t^* och s_t^{**} ska få korrekta värden behövs två linjära bivillkor. Det första bivillkoret tvingar s_t^{**} att bli lika med ett om kraftverket är i drift timme t , men varit ur drift timme $t-1$ respektive $t-2$:

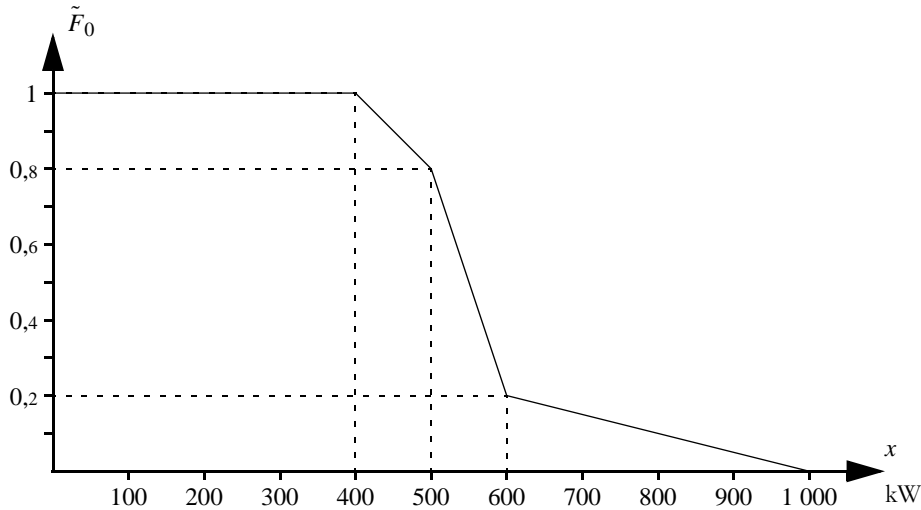
$$s_t^{**} \geq u_t - u_{t-1} - u_{t-2}.$$

Det andra bivillkoret ska tvinga s_t^* att bli lika med ett om kraftverket är i drift timme t respektive $t-2$, men varit ur drift timme $t-1$. Vilka av följande uttryck ska användas för det andra bivillkoret?

1. $s_t^* \geq u_t - u_{t-1} - s_t^{**}.$
2. $s_t^* \geq u_t - u_{t-1} - u_{t-2}.$
3. $s_t^* - u_{t-2} \geq u_t - u_{t-1}.$

Uppgift 5 (12 p)

Ekibuga är en stad i Östafrika. Staden är inte ansluten till något nationellt elnät, utan man har ett eget lokalt system som försörjs av ett vattenkraftverk i närbelägna Omugga. Det lokala systemet omfattar också några mindre byar på vägen mellan Omugga och Ekibuga. Vattenkraftverket saknar magasin, men vattenflödet är alltid tillräckligt stort för att man ska kunna producera installerad effekt (800 kW) och risken för driftstopp i kraftverket är försumbar. Varaktighetskurvan för den totala lasten i systemet visas i figuren nedan.



a) (2 p) Hur stor är den förväntade ickelevererade energin per timme för systemet med enbart vattenkraftverket?

b) (2 p) För att förbättra leveranssäkerheten i systemet överväger man att sätta upp en dieselgenerator i Ekibuga. Den tänkta dieselgeneratoren skulle ha 100 kW installerad effekt, 80% tillgänglighet och driftkostnaden 2 kr/kWh . Den förväntade ickelevererade energin om man beaktar både vattenkraftverket och dieselgeneratoren är 4 kWh/h. Beräkna den förväntade driftkostnaden per timme för systemet med ett vattenkraftverk och en dieselgenerator.

c) (3 p) Ett alternativ till dieselgeneratoren för att förbättra leveranssäkerheten är att sätta upp ett vindkraftverk i Kasozi. Vindkraftverket skulle få en installerad effekt på 200 kW och den tillgängliga produktionskapacitet modelleras enligt tabell 2. Beräkna *LOLP* för systemet med ett vattenkraftverk och ett vindkraftverk.

Tips: Faltningsekvationen för en flertillståndsmo­dell ser ut så här:

$$\tilde{F}_g(x) = \sum_{i=1}^{N_g} p_{g,i} \tilde{F}_{g-1}(x - x_{g,i}).$$

Tabell 2 Modell av vindkraftverket i Kasozi.

Tillgänglig produktionskapacitet [kW]	Sannolikhet [%]
0	20
50	30
100	20
150	20
200	10

d) (4 p) Antag att man använder en kombination av slumpfalskomplement och kontrollvariabler för att simulera systemet med ett vattenkraftverk och en dieselgenerator. I simuleringen ingår 1 000 ursprungliga scenarier, y_i , $i = 1, \dots, 1\,000$. Dessutom har man genererat motsvarande komplementära scenarier, y_i^* , $i = 1, \dots, 1\,000$. Den förenklade modellen, $\tilde{g}(Y)$, motsvarar den modell som används i stokastisk produktionskostnadssimulering, medan den detaljerade modellen, $g(Y)$, tar hänsyn faktorer som att förlusterna beror på vilka kraftverk som körs och hur stor lasten är i olika delar av systemet. Resultaten visas i tabell 3. Vilken skattning av *ETOC* får man för den detaljerade modellen?

Tabell 3 Resultat från Monte Carlo-simuleringen i uppgift 5d.

Detaljerad modell		Förenklad modell	
Total driftkostnad i de ursprungliga scenarierna, 1000	Total driftkostnad i de komplementära scenarierna, 1000	Total driftkostnad i de ursprungliga scenarierna, 1000	Total driftkostnad i de komplementära scenarierna, 1000
$\sum_{i=1} g(y_i)$	$\sum_{i=1} g(y_i^*)$	$\sum_{i=1} \tilde{g}(y_i)$	$\sum_{i=1} \tilde{g}(y_i^*)$
[α /h]	[α /h]	[α /h]	[α /h]
45 120	43 550	12 120	11 950

e) (1 p) Antag att man i stället för att använda slumpfalskomplement och kontrollvariabler simulerar samma system med hjälp av stratifierad sampling. Delresultat för varje stratum återfinns i tabell 4. Vilken skattning av *LOLP* får man för detta system?

Tabell 4 Resultat från Monte Carlo-simuleringen i uppgift 5e.

Stratum, h	1	2	3	4	5
Stratumvikt, ω_h	0,85	0,05	0,02	0,02	0,06
Skattning av risken för effektbrist, m_{LOLOh}	0	0	0	0,25	1

DEL II (FÖR HÖGRE BETYG ÄN GODKÄNT)

Alla beteckningar som införs skall förklaras. Lösningarna skall vara så utförliga att det utan problem går att följa tanke- och beräkningsgången.

Svaren på de olika uppgifterna skall lämnas in på olika blad, men svar på deluppgifter (a, b, c, o.s.v) kan skrivas på samma blad. Fälten *Namn*, *Blad nr* och *Uppgift nr* skall fyllas i på varje blad.

Del II kan ge totalt 60 poäng. Del II kommer endast att rättas om tentanden erhållit minst 33 poäng på del I. Om så är fallet summeras resultatet på del I, del II och bonuspoängen. Denna summa ligger till grund för vilket betyg (A, B, C, D, E) som ges på tentamen.

Uppgift 6 (10 p)

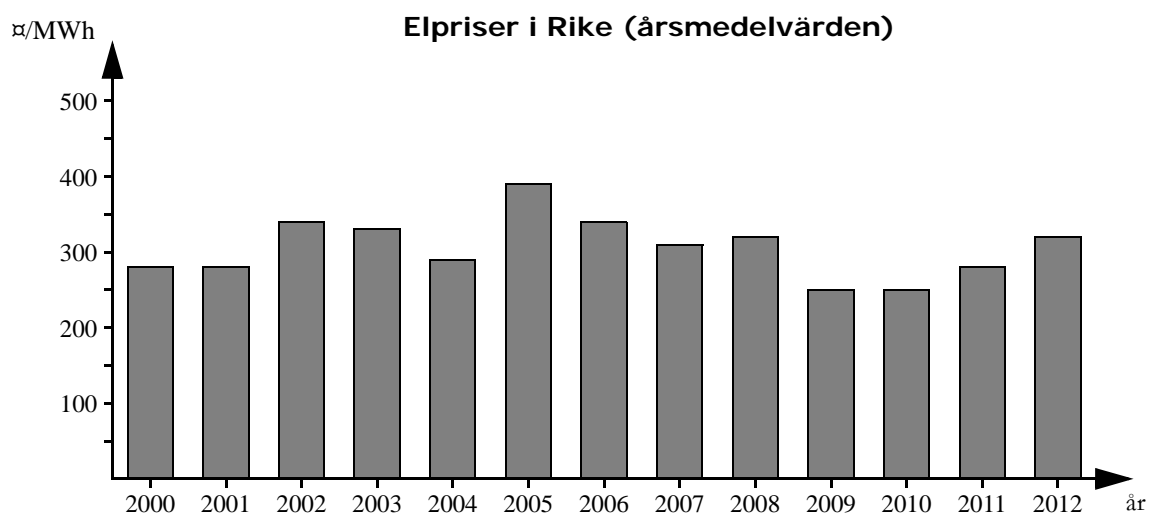
I dagsläget produceras det ungefär 1 TWh vindkraft i Rike, men man funderar man på en storskalig utbyggnad. För att genomföra denna satsning har det föreslagits att man i Rike ska införa ett system med gröna certifikat. För varje MWh som produceras i de nybyggda vindkraftverken erhåller ägaren ett grönt certifikat. Konsumenterna åläggs sedan att köpa certifikat motsvarande 10% av deras elkonsumtion, vilket alltså innebär att en konsument med en årlig förbrukning på 100 MWh måste köpa 10 gröna certifikat per år. Rikes energimyndighet bedömer att ett sådant system skulle leda till en utbyggnad av 4 000 MW vindkraft, med en genomsnittlig årsproduktion på 10 TWh vindkraft. Certifikatpriset bedöms hamna på 250 kr /certifikat.

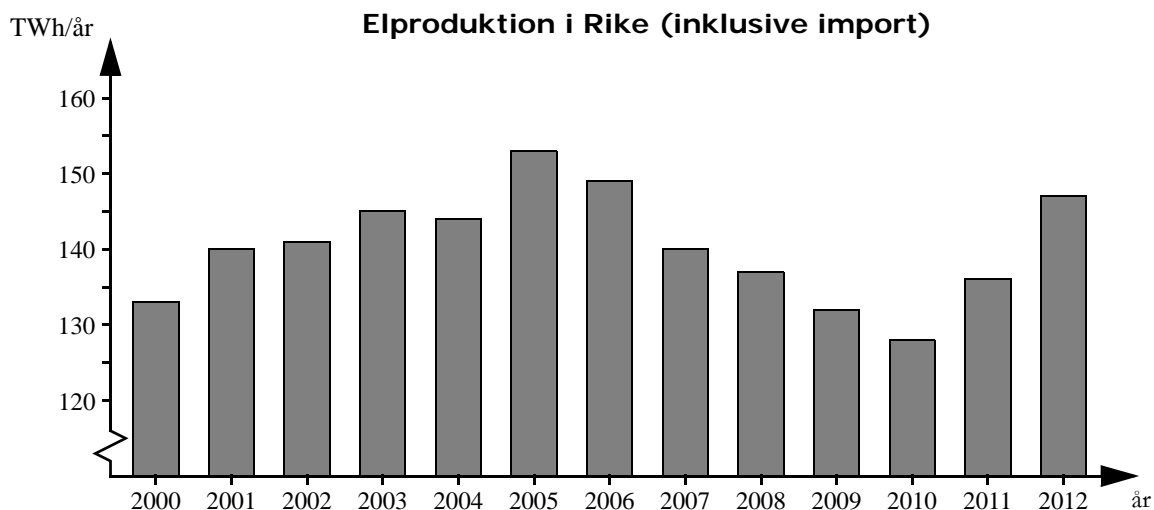
Rikes utsiktsskyddsförening (en organisation som är välbekanta motståndare till vindkraft) har med anledning av ovanstående skrivit en debattartikel i Rikes största tidning. Debattartikeln avslutas på följande vis: "Vindkraften är inte till någon som helst nytta för elförsörjningen i Rike och det är mycket svårt att förstå varför folket i Rike ska använda minst 2,5 miljarder kr för att subventionera förstörda skogar, sprängskadade berg, ledningsgator och långtradarvägar i fjällen och förstörda världsarv!"

Använd statistiken nedan och egna antaganden och gör en egen analys av hur mycket den föreslagna vindkraftutbyggnaden kommer att påverka elkonsumenterna i Rike.

OBS! Det som bedöms i denna uppgift är inte slutsatsen om en satsning på vindkraft i Rike är lönsam eller inte utan hur väl du kan resonera kring och värdera de uppgifter som förs fram.

Tips: Finns det några andra kostnadökningar eller -minskningar p.g.a vindkraften än de som nämns ovan?





Uppgift 7 (10 p)

Betrakta ett elsystem bestående av de tre länderna Åland, Beland och Celand. Länderna är förbundna med växelströmsledningar och varje förbindelse är försedd med ett skyddssystem som efter en viss tidsfördröjning automatiskt kopplar bort förbindelsen om flödet skulle överskrida den maximala kapaciteten. Den maximala överföringskapaciteten samt nuvarande flöde återfinns i tabell 5 nedan.

Primärregleringen i de tre länderna är uppdelad i en normaldriftreserv och en störningsreserv. Normaldriftreserven, vars syfte är att hantera normala variationer i t.ex. last och vindkraftproduktion, är tillgänglig i frekvensintervallet 49,9–50,1 Hz, medan störningsreserven är till för att hantera bortfall i större kraftverk och är tillgänglig i frekvensintervallet 49,5–49,9 Hz. Data för primärregleringen anges också i tabell 5.

a) (4 p) Vid ett visst tillfälle råder balans mellan produktion och konsumtion och frekvensen i systemet är 49,96 Hz. P.g.a. av ett kylvattenläckage måste ett kärnkraftverk i Åland snabbstoppas, vilket innebär att man tappar 900 MW produktion. Vad blir då den nya frekvensen i respektive area?

Tabell 5 Data för kraftsystemet.

Land	Normaldriftreserv [MW/Hz]	Störningsreserv [MW/Hz]	Transmissionsförbindelser			
			Till	Typ	Kapacitet [MW]	Nuvarande flöde [MW]
Åland	800	700	Beland	Växelström	1 000	Import 200
Beland	1 500	700	Åland	Växelström	1 000	Export 200
			Celand	Växelström	800	Export 400
Celand	700	600	Beland	Växelström	800	Import 400

b) (6 p) De tre länderna har en gemensam reglermarknad, och de tre systemoperatörerna delar på kostnaderna för att aktivera bud från denna reglermarknaden. Detta innebär att man alltid väljer att aktivera de bud som ger lägst totalkostnad, oberoende av i vilket land budet aktiveras.

För att avlasta primärregleringen efter den situation som beskrevs i a-uppgiften behöver systemoperatörerna aktivera uppreglering. De uppregleringsbud som finns tillgängliga vid detta tillfälle återfinns i tabell 6. Buden behöver inte antas i sin helhet, utan systemoperatörerna kan välja hur många MW som ska aktiveras i varje bud. Totalt önskar systemoperatörerna aktivera 900 MW uppreglering. Vilka reglerbud ska aktiveras om uppregleringen ska ske till lägsta möjliga totalkostnad utan att man överbelastar några transmissionsförbindelser?

Tabell 6 Tillgängliga uppregleringsbud.

Bud	Uppreglering		
	Maximal volym [MW]	Pris [$\text{€}/\text{MWh}$]	Land
1	250	410	Celand
2	250	415	Celand
3	200	420	Beland
4	150	430	Celand
5	200	450	Aland
6	200	480	Beland

Uppgift 8 (20 p)

Det kommunala elbolaget Stads energi AB äger oljekondenskraftverket Röksta samt en vindkraftspark. Oljekondenskraftverket har två block. Bolaget har gjort bedömningen att det inte är lönsamt att stänga av ett block för enbart en timme och därför ska ett block som tas ur drift inte återstartas förrän tidigast efter två timmar. Övriga data för Röksta ges i tabell 7.

Bolaget har ett fastkraftavtal på 100 MWh/h med AB Elleverantören. För att kunna leverera denna kvantitet använder Stads energi AB dels de egna kraftverken och dels har man möjlighet att handla på den lokala elbörsen ElKräng. För att hinna lämna in buden till ElKräng i tid måste Stads energi AB göra upp driftplanerna för måndag redan under söndag förmiddag. Driften av Röksta under söndagen framgår av tabell 8. Då man planerar driften för måndagen utgår man från de prognoser för elpriser och vindkraftproduktion som anges i tabell 9. Man antar också att man kan köpa och sälja obegränsade mängder el till de prognoserade elpriserna.

a) (10 p) Formulera Stads energi AB:s planeringsproblem som ett MILP-problem. För parametrarna ska beteckningarna i tabell 10 användas (det är dock även tillåtet att lägga till ytterligare beteckningar om man anser att det behövs).

OBS! För att få full poäng på denna uppgift krävs att

- Beteckningarna för optimeringsvariablerna ska vara klart och tydligt definierade.
- Optimeringsproblemet ska vara så formulerat att man tydligt kan se vad som är målfunktion, vad som är bivillkor och vad som är variabelgränser.
- Möjliga värden för alla index ska finnas tydligt angivet vid alla ekvationer.

b) (10 p) Figuren på nästa sida visar verkningsgraden som funktion av elproduktionen i Röksta block I. Antag att oljan kostar 1 860 SEK/ton och att dess värmeinhåll är 11,9 kWh/kg. Antag att man vill modellera produktionskostnaden som funktion av elproduktionen med hjälp av en styckvis linjär modell. Modellen ska ha två segment, samt beakta att elproduktion i intervallet mel-

Tabell 7 Data för det termiska kraftverket Röksta.

	Block I	Block II
Installerad effekt [MW]	120	96
Minimal elproduktion vid drift [MW]	40	30
Driftkostnad [SEK/MWh]	460	490
Startkostnad [SEK/start]	36 000	31 000
Kortaste stopptid [h]	2	2

Tabell 8 Driftplan för elproduktionen i Röksta under söndagen.

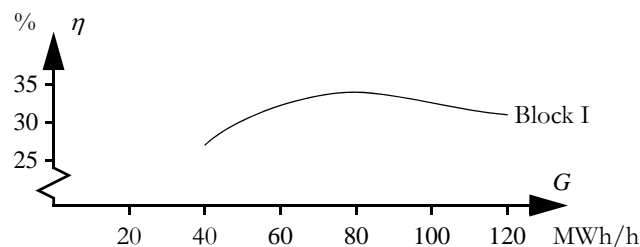
Tid	Elproduktion [MWh]	
	Block I	Block II
0-5	0	0
5-22	120	0
22-24	0	0

Tabell 9 Prognoser för måndagen.

Timme	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12
Pris på ElKräng [SEK/MWh]	448	446	444	436	442	448	471	523	566	558	529	489
Vindkraftproduktion [MWh]	11	11	9	9	9	8	8	7	6	6	5	5
Timme	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Pris på ElKräng [SEK/MWh]	470	464	457	453	452	468	513	483	460	458	452	448
Vindkraftproduktion [MWh]	4	4	5	6	8	7	5	5	7	10	15	19

Tabell 10 Beteckningar till Stads energi AB:s planeringsproblem.

Beteckning	Förklaring	Värde
\bar{G}_g	Installerad effekt i block g	Se tabell 7
\underline{G}_g	Minimal elproduktion då block g är i drift	Se tabell 7
β_{Gg}	Rörlig produktionskostnad i block g	Se tabell 7
C_g^+	Startkostnad i block g	Se tabell 7
$u_{g,0}$	Driftstatus i block g före planeringsperiodens början	0 (jfr tabell 8)
λ_t	Förväntat pris på ElKräng timme t	Se tabell 9
W_t	Förväntad vindkraftproduktion timme t	Se tabell 9
D_t	Avtalad last	100



lan 0 och 40 MWh/h inte är tillåten. Hur måste planeringsproblemet från a-uppgiften formuleras om för att inkludera denna modell? Glöm inte att definiera alla nya variabler och parametrar du inför, samt att motivera valet av brytpunkt mellan de två segmenten!

Tips: Produktionskostnaden under en viss timme kan skrivas på formen

$$\beta_{u1} u_{1,t} + \beta_{G1,1} G_{1,1,t} + \beta_{G1,2} G_{1,2,t}$$

där β_{u1} , $\beta_{G1,1}$ och $\beta_{G1,2}$ är parametrar och $u_{1,t}$, $G_{1,1,t}$ och $G_{1,2,t}$ är optimeringsvariabler.

Uppgift 9 (20 p)

Akabuga är en liten stad i Östafrika. Trots många år av löften från elbolaget i Eggwanga är Akabuga ännu inte anslutet till det nationella elnätet. Ett antal företagare och privatpersoner i Akabuga överväger därför nu att starta ett kooperativ, Akabuga Electricity Consumers Cooperative Limited (AECCO), som ska bygga och driva ett lokalt elnät i Akabuga. Tanken är att man måste vara medlem för att få ansluta sig till elnätet och att alla medlemmar ska betala en enhetlig tariff per förbrukad kWh. Denna tariff, som blir AECCO:s enda intäkt ska sättas så att den täcker samtliga kostnader (fasta och rörliga) på årsbasis. Dessutom vill man att tarifferna ska generera ett överskott på ungefär 5%, som kan användas för kommande investeringar i elsystemet.

AECCO överväger två alternativ för att försörja det lokala elnätet. Det första alternativet är att skaffa tre dieselgeneratorer, vardera med en kapacitet på 250 kW och 90% tillgänglighet. Dieselgeneratorerna beräknas innebära en investeringskostnad på sammanlagt 600 000 ₪/år samt en rörlig driftkostnad på 10 ₪/ kWh. Det andra alternativet är att bygga ett 800 kW vattenkraftverk i Ekiyira, som ligger en bit ifrån Akabuga. De rörliga produktionskostnaderna och risken för driftstörningar antas vara försumbara för vattenkraftverket. Däremot skulle man få vissa förluster på ledningen mellan Ekiyira och Akabuga. Dessa förluster kan beräknas enligt

$$L = \beta_L \cdot P^2,$$

där

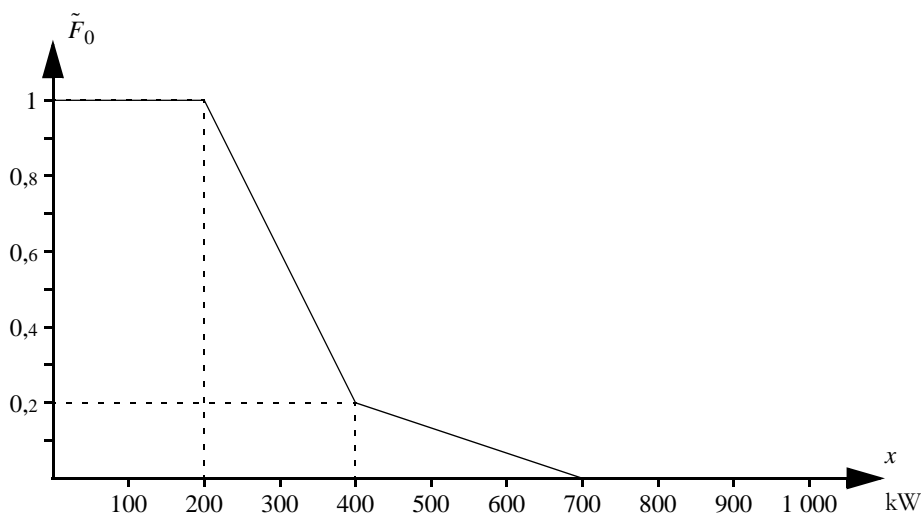
L = förlusterna på ledningen [kW],

β_L = förlustkoefficient [kW^{-1}] = 0,00015,

P = inmatad effekt på ledningen [kW].

Den årliga kostnaden för vattenkraftverket (investeringskostnader för kraftverket och ledningen, löner till personal, underhåll, o.s.v.) skulle uppgå till 25 M₪.

Baserat på erfarenheter från andra delar av Eggwanga har man kommit fram till följande varaktighetskurva för lasten i Akabuga:



a) (8 p) Föreslå en metod för att beräkna den förväntade driftkostnaden för elsystemet i Akabuga. Beskriv vilka antaganden du gör och hur du ska gå tillväga för att få ett så noggrant resultat som möjligt med de begränsade data som ges här och den begränsade tid som du har till ditt förfogande.

b) (12 p) Ska AECCO skaffa dieselgeneratorer eller bygga vattenkraftverket? Antag att de fasta kostnaderna för kooperativet (investeringar i det lokala distributionsnätet, löner till personal, o.s.v) uppgår till 23 M € /år. Förlusterna i distributionsnätet i Akabuga kan anses försumbara.

Tabell 11 Slumptal från en $U(0, 1)$ -fördelning.

0,81	0,63	0,96	0,96	0,42	0,66	0,68	0,66	0,28	0,69
0,91	0,10	0,97	0,49	0,92	0,04	0,76	0,17	0,05	0,32
0,13	0,28	0,16	0,80	0,79	0,85	0,74	0,71	0,10	0,95
0,91	0,54	0,97	0,14	0,96	0,93	0,39	0,03	0,82	0,03



KTH Elektro-
och systemteknik

Svarsblad till del I

Namn:

Personnummer:

Uppgift 1

a) Alternativ är korrekt.

b) Alternativ är korrekt.

c) Alternativ är korrekt.

Uppgift 2

a) TWh/år b) TWh/år

c) TWh/år d) ϖ /MWh

Uppgift 3

a) MW b) Hz

Uppgift 4

a)

b)

c) $\mu_{3,1}$ MWh/TE $\mu_{3,2}$ MWh/TE

$\bar{Q}_{3,1}$ TE $\bar{Q}_{3,2}$ TE

d) Alternativ är korrekt.

Uppgift 5

a) kWh/h b) ϖ /h

c) % d) ϖ /h

e) %

Lösningssförslag till tentamen i EG2050 Systemplanering, 20 maj 2014.

Uppgift 1

- a) 3, b) 4, c) 2.

Uppgift 2

- a) Eftersom elpriset är högre än den rörliga produktionskostnaden i den dyraste vattenkraften kommer vattenkraftverken i Rike att producera för fullt, d.v.s. 50 TWh/år.
 b) Eftersom elpriset är lägre än den rörliga produktionskostnaden i de billigaste gasturbinerna kommer gasturbinerna i Rike inte att användas.
 c) Den del av kolkondensen som har en lägre driftkostnaden än elpriset 370 □/MWh kommer att utnyttjas, d.v.s. $(370 - 300)/(450 - 300) \cdot 15 = 7$ TWh/år.
 d) Antag att vi har samma elpris i Maa som i Rike, d.v.s. 370 □/MWh. Vid detta elpris produceras 10 TWh vattenkraft, 20 TWh kärnkraft och 7 TWh kolkondens, vilket ger oss totalt 37 TWh. De resterande 13 TWh måste då importeras från Rike. Detta är emellertid inte möjligt, eftersom överföringskapaciteten mellan länderna endast är 10 TWh/år. Därmed kan vi konstatera att elpriset i Maa måste vara högre än elpriset i Rike. Vi får då sammanlagt 40 TWh från vattenkraft, kärnkraft och import, vilket innebär att det behövs 10 TWh kolkondens i Maa. Alltså utnyttjas 10/15 av prisintervall för kolkondens, d.v.s. elpriset i Maa måste vara $300 + 10/15 \cdot 150 = 400$ □/MWh.

Uppgift 3

- a) De kraftverk som ingår i primärregleringen kompenserar starten av kärnkraftverket genom att minska elproduktionen med totalt 1 030 MW. Varje enskilt kraftverks bidrag motsvarar dess andel av den totala reglerstyrkan. Forsen motsvarar 2,5% av reglerstyrkan i systemet och ska sällas minskas produktionen med 25,75 MW. Kraftverket har dock bara möjlighet att minska produktionen med 16 MW. Kraftverket kommer således att producera 26 MW (högsta möjliga effekt då kraftverket är i drift).
 b) De övriga reglerstyrkestyrda kraftverken i systemet måste minska elproduktionen med 1 014 MW, vilket kräver att frekvensen ökar med 1 014 MW/7 800 MW/Hz = 0,13 Hz. Den nya frekvensen i systemet blir således 50,190 + 0,130 = 50,320 Hz.

Uppgift 4

- a) maximera
$$\sum_{t=1}^{24} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \sum_{j=1}^3 \mu_{i,j} Q_{i,j,t} + \lambda_{25} (\gamma_1 + \gamma_3) M_{1,24} + (\gamma_2 + \gamma_3) M_{2,24} + \gamma_3 M_{3,24}.$$

- b) De optimeringsvariabler som ingår i problemet är spill, tappning och magasininnehåll, vilket ger oss följande gränser:

$$\begin{aligned} 0 &\leq M_{i,t} \leq \bar{M}_i, & i &= 1, 2, 3, t = 1, \dots, 24, \\ 0 &\leq Q_{i,j,t} \leq \bar{Q}_{i,j} & i &= 1, 2, 3, j = 1, 2, t = 1, \dots, 24, \end{aligned}$$

$$0 \leq S_{i,t}^p, \quad i = 1, 2, 3, t = 1, \dots, 24.$$

- c) Följande data är givna i uppgiften:

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \text{maximal tappning i Språnget} = 375, \\ \bar{Q} &= \text{tappning i Språnget vid bästa verkningsgrad} = 250, \\ \gamma_{\text{max}} &= \text{maximal produktionssekvivalent i Språnget} = 1, \\ \eta(\bar{Q}) &= \text{relativ verkningsgrad vid maximal tappning i Språnget} = 0,96. \end{aligned}$$

För att beräkna de marginella produktionssekvivalenterna behövs elproduktionen vid de olika tappningarna. Dessa erhålls enligt formeln $H = \gamma_{\text{max}} \cdot \eta(\bar{Q}) \cdot \bar{Q}$:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \text{elproduktion i Språnget vid bästa verkningsgrad} = 1 \cdot 1 \cdot 250 = 250, \\ \bar{H}_i &= \text{maximal elproduktion i Språnget} = 1 \cdot 0,96 \cdot 375 = 360. \end{aligned}$$

De marginella produktionssekvivalenterna kan nu beräknas enligt

$$\mu_1 = \frac{\hat{H}}{\bar{Q}}$$

och

$$\mu_2 = \frac{\bar{H} - \hat{H}}{\bar{Q} - \hat{Q}},$$

vilket ger följande linjära modeller av kraftverket:

$$\mu_j = \text{marginell produktionssekvivalent i Språnget, segment } j = \begin{cases} 1,00 & j = 1, \\ 0,88 & j = 2, \end{cases}$$

$$\bar{Q}_j = \text{maximal tappning i Språnget, segment } j = \begin{cases} 250 & j = 1, \\ 125 & j = 2. \end{cases}$$

- a) 1.

Uppgift 5

- a) Den icke-levererade energin under en timme ges av

$$EENS_1 = 1 \cdot \int_{800}^{\infty} \bar{F}_1(x) dx = 0,1 \cdot 200 \cdot 2 = 10 \text{ kWh/h.}$$

- b) Den förväntade elproduktionen i dieselgeneratoren är $EG_2 = EENS_1 - EENS_2 = 6$ kWh/h. Den förväntade driftkostnaden blir således $ETOC = 2EG_2 = 12$ □/h.

$$c) LOLP = \bar{F}_2(1000) = 0,1 \bar{F}_1(1000) + 0,2 \bar{F}_1(950) + 0,2 \bar{F}_1(900) + 0,3 \bar{F}_1(850) + 0,15 \bar{F}_1(800) = 0,1 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0,025 + 0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,075 + 0,2 \cdot 0,1 = 5,75\%.$$

- d) I praktiken behöver man inte göra något skillnad mellan observationer från de ursprungliga scenarierna och de kompletterade scenarierna, utan den förväntade skillnaden mellan den detaljerade och den förenklade modellen ges av

$$\eta(ETOC - TOC) = \frac{1}{2000} \left(\sum_{i=1}^{1000} (g(Y_i) - \bar{g}(Y_i)) + \sum_{i=1}^{1000} (g(Y_i^*) - \bar{g}(Y_i^*)) \right) = 32,3 \text{ □/h.}$$

Väntevärdet för den förenklade modellen (som ju motsvaras av en SP5-modell) beräknas till 12 ¢/h i b-uppgiften. Skattningen av $ETOC$ för den detaljerade modellen blir således

$$m_{TOC} = m(TOC - \bar{TOC}) + \mu_{TOC} = 32,3 + 12 = 44,3 \text{ ¢/h.}$$

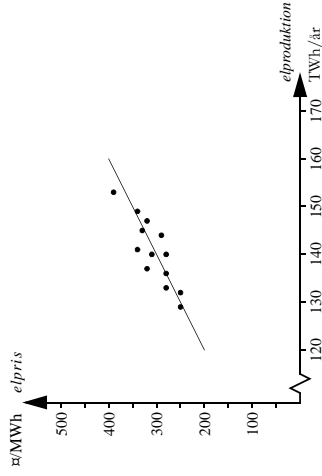
$$e) m_{LOLO} = \sum_{h=1}^5 \omega_h m_{LOLOh} = 0 + 0 + 0 + 0,02 \cdot 0,25 + 0,06 \cdot 1 = 6,5\%.$$

Uppgift 6

I och med att vi inte har särskilt mycket information om elsystemet i Rike, får vi utgå från att de data som presenteras är korrekta; det verkar ju inte heller som om Rikes usitskysdisförening ifrågasätter energimyndighetens siffror i och med att den kostnad de anger för subventionerna motsvarar kostnaden för 10 TWh gröna certifikat till priset 250 ¢/certifikat. Uppenbarligen innebär också detta en ökad kostnad för elkonsumenterna i Rike, närmare bestämt 25 ¢/MWh.

I och med att elproduktionen i vindkraft varierar kontinuerligt kommer man även att få ett ökat behov av frekvensreglering, vilket naturligtvis också innebär en kostnad. Dessutom behöver förmodligen gamla ledningar förstärkas och nya byggas för att ansluta vindkraften till elsystemet i Rike. Hur stora dessa kostnader är kan vi dock inte uttala oss om med ledning av de data som ges i uppgiften.

Vindkraften medför emellertid inte enbart ökade kostnader, utan kommer även att sänka elpriset på elmarknaden i Rike. Hur mycket priset sjunker beror på de rörliga driftkostnaderna ser ut i de kraftverk som kan komma att ersättas av vindkraften, samt på hur prisänslig efterfrågan är. Utifrån den givna statistik kan vi göra en grov uppskattning av hur mycket elpriset påverkas för varje tillförd TWh vindkraft genom att anta att det finns ett linjärt samband mellan elpris och elförbrukningen. Detta samband kan vi skatta genom att rita upp elpriset som funktion av elproduktionen:



Utifrån denna skattning så verkar det som att ifall elproduktionen i övriga kraftverk minskar med 10 TWh/år så minskar elpriset med 50 ¢/MWh.

Vi kan alltså konstatera att konsumenterna får en ökad kostnad på grund av de gröna certifikaten, men att de också får en sänkning av elpriset som kan vara i samma storleksordning eller större än certifikatkostnaderna. Dessutom får man ökade kostnader för frekvensreglering och nätutbyggnad (vilka naturligtvis i slutändan måste betalas av konsumenterna). Förutom de krasst ekonomiska perspektivet så handlar värderingen av vindkraften också om hur man prioriterar olika mil-

jömål (sänka koldioxidutsläpp, värdet av orörd natur, o.s.v.). Här saknar vi alldeles för mycket data för att kunna dra någon slutsats om huruvida vindkraft är lönsamt eller inte för Rike.

Uppgift 7

a) I första hand är det normaldrifreserven som aktiveras då kärnkraftverket kopplas bort. Den totala reglerstyrkan i normaldrifreserven är 3 000 MW/Hz och frekvensen kan sjunka med 0,06 Hz innan normaldrifreserven är fullt utnyttjad; detta betyder att normaldrifreserven kommer att kompensera $3\,000 \cdot 0,06 = 180 \text{ MW}$ av bortfallet. Övriga 720 MW av bortfallet måste således täckas av störningsreserven. Eftersom den totala reglerstyrkan i störningsreserven är 2 000 MW/Hz så kommer frekvensen att sjunka med ytterligare $720/2\,000 = 0,36 \text{ Hz}$, vilket innebär att systemets frekvens kommer att stabiliseras vid 49,54 Hz.

Vi måste nu kontrollera att transmissionsförbindelserna kan hantera de nya flöden som uppstår. Varje land kommer att öka elproduktion i enlighet med dess andel av systemets totala reglerstyrka i normaldrifreserven respektive störningsreserven:

$$\Delta G_A = \frac{800}{3\,000} \cdot 180 + \frac{700}{2\,000} \cdot 720 = 300 \text{ MW,}$$

$$\Delta G_B = \frac{1\,500}{3\,000} \cdot 180 + \frac{700}{2\,000} \cdot 720 = 342 \text{ MW,}$$

$$\Delta G_C = \frac{700}{3\,000} \cdot 180 + \frac{600}{2\,000} \cdot 720 = 258 \text{ MW.}$$

De nya transmissionsflödena blir

$$P_{B \rightarrow C} = 400 - \Delta G_C = 142 \text{ MW,}$$

$$P_{B \rightarrow A} = 200 + \Delta G_B + \Delta G_C = 800 \text{ MW.}$$

Dessa flöden ligger inom varje lednings kapacitet och således kommer systemet att vara i balans vid frekvensen 49,54 Hz.

b) Eftersom vi tillför lika mycket ny elproduktion som det tidigare bortfallet, så kommer vi att få samma situation som före felet, så när som på att en del av elproduktionen i Åland har flyttats till Beland och Celand. Om vi aktiverar de billigaste buden (d.v.s. bud 1–4 samt 50 MW från bud 5) så tillförs totalt 650 MW i Celand, vilket ger transmissionsflödet $P_{B \rightarrow C} = 400 - 650 = -250 \text{ MW}$, vilket inte överskrider kapaciteten för ledningen. I Beland tillförs 200 MW, vilket ger transmissionsflödet $P_{B \rightarrow A} = 200 + 200 + 650 = 1\,050 \text{ MW}$ – detta flöde överskrider ledningens kapacitet med 50 MW. För att hålla oss inom gränserna måste ytterligare 50 MW tillföras i Åland, samtidigt som vi minskar uppregleringen med 50 MW i Celand (eftersom bud 4 är det dyraste av buden utanför Åland). Således ska vi aktivera hela bud 1–3, 100 MW från bud 4 och 100 MW från bud 5.

Uppgift 8

a) Problemet vi vill lösa är

maximera

värdet av såld el – kostnad för köpt el

– produktionskostnad för Röksta – startkostnad för Röksta,

med hänsyn till

begärningar i produktionskapacitet,

samband mellan driftstatus, start och stopp i Röksta,

krav på kortaste stopptid i Röksta, lastbalans.

Index för termiska kraftverk

Röksta block I - 1, Röksta block II - 2.

Parametrar

Parametrarna är definierade i tabell 10 i uppgiftslydelsen.

Optimeringsvariabler

$G_{g,t}$ = elproduktion i block g under timme t , $t = 1, \dots, 24$,
 $s_{g,t}^+$ = start av block g i början av timme t , $t = 1, \dots, 24$,
 $s_{g,t}^-$ = stopp av block g i början av timme t , $t = 1, \dots, 24$,
 $u_{g,t}$ = driftstatus för block g under timme t , $t = 1, \dots, 24$,
 p_t = köp från Elkörning under timme t , $t = 1, \dots, 24$,
 r_t = försäljning till Elkörning under timme t , $t = 1, \dots, 24$.

Målfunktion

$$\text{maximera} \sum_{t=1}^{24} \lambda_t (r_t - p_t) - \sum_{t=1}^{24} \sum_{g=1}^2 (\beta_{Gg} G_g + C_{g,t}^{s^+} + C_{g,t}^{s^-})$$

Bivillkor

Maximal produktion för de två blocken i Röksta:

$$G_{g,t} \leq u_{g,t} \bar{G}_{g,t}$$

Minimal produktion för de två blocken i Röksta:

$$u_{g,t} \underline{G}_{g,t} \leq G_{g,t}$$

Samband mellan driftstatus, start och stopp för de två blocken i Röksta:

$$u_{g,t} - u_{g,t-1} = s_{g,t}^+ - s_{g,t}^-$$

Krav på stopptid för de två blocken i Röksta:

$$s_{g,t}^+ + s_{g,t+1}^- \leq 1, \quad g = 1, 2, t = 1, \dots, 23.$$

Lastbalans:

$$G_{1,t} + G_{2,t} + W_t + p_t = D + r_t, \quad t = 1, \dots, 24.$$

Variabelgränser

$$\begin{aligned} s_{g,t}^+ &\in \{0, 1\}, & g = 1, 2, t = 1, \dots, 24, \\ s_{g,t}^- &\in \{0, 1\}, & g = 1, 2, t = 1, \dots, 24, \\ u_{g,t} &\in \{0, 1\}, & g = 1, 2, t = 1, \dots, 24, \\ 0 &\leq p_t, & t = 1, \dots, 24, \end{aligned}$$

$$0 \leq r_t, \quad t = 1, \dots, 24.$$

b) Elproduktionen i block I måste delas upp i två segment. Brytpunkten mellan de två segmenten ligger vi vid bästa verkningsgrad, eftersom den optimala lösningen till både LP och MILP-problem ofta blir lika med en variabls maximala eller minimala värde.

Inför följande optimeringsvariabler:

$$G_{1,j,t} = \text{elproduktion i block I, segment } j, \text{ under timme } t, j = 1, 2, t = 1, \dots, 24.$$

Observera att vi tänker oss att den undre gränsen för elproduktionen i ett visst segment är 0.

För att beräkna produktionskostnaden måste vi beräkna marginalkostnaden för elproduktion i varje segment, d.v.s.

$$\beta_{G1,j} = \text{marginal produktionskostnad i block I, segment } j, j = 1, 2.$$

För att bestämma de marginella produktionskostnaderna behöver vi känna till produktionskostnaden vid tre nivåer på elproduktionen: minimal elproduktion, bästa verkningsgrad och maximal elproduktion. Med hjälp av formeln

$$C(G) = \phi - \frac{G}{h} \cdot \eta(G),$$

där följande parametrar är givna i uppgiften:

$$\begin{aligned} \phi &= \text{bränslepris} = 1860, & h &= \text{bränslets värmeinnehåll} = 11.9, & \eta(G) &= \begin{cases} 0,27 & G = 40, \\ 0,34 & G = 80, \\ 0,31 & G = 120, \end{cases} \end{aligned}$$

$$C(40) \approx 23156 \text{ SEK}, C(80) \approx 36777 \text{ SEK}, C(120) \approx 60504 \text{ SEK}.$$

Däremot får vi de marginella produktionskostnaderna

$$\beta_{G1,1} = \frac{C(80) - C(40)}{80 - 40} \approx 340.53, \beta_{G1,2} = \frac{C(120) - C(80)}{120 - 80} \approx 593.18.$$

Om både $G_{1,1,t}$ och $G_{1,2,t}$ är 0 så betyder det att kraftverket producerar 40 MW om det är i drift, d.v.s. om $u_{1,t} = 1$, och annars 0. Eftersom $C(40) \approx 23156$ inför vi en parameter $\beta_{u1} = 23156$, som representerar kostnaden för att producera 40 MW. Till denna kostnad lägger vi till produktionskostnaderna för respektive segment. Detta ger oss följande nya målfunktion:

$$\text{maximera} \sum_{t=1}^{24} \lambda_t (r_t - p_t) - \sum_{t=1}^{24} \left(\sum_{g=1}^2 C_{g,t}^{s^+} + \beta_{u1} u_{1,t} + \sum_{j=1}^2 \beta_{G1,j} G_{1,j,t} + \beta_{G2} G_{2,t} \right).$$

Det är inte möjligt att producera någonting i de två segmenten om inte kraftverket är i drift, vilket representeras av följande bivillkor:

$$G_{1,j,t} \leq u_{1,t} \bar{G}_{1,j,t}, \quad j = 1, 2, t = 1, \dots, 24.$$

där

$$\bar{G}_{1,j} = \text{maximal produktionskapacitet i block I, segment } j = 40, j = 1, 2.$$

I och med att vi delar upp elproduktionen i block I i flera segment, måste vi även uppdatera lastbalansbivillkoret:

$$\underline{G}_1 u_{1,t} + G_{1,1,t} + G_{1,2,t} + G_{2,t} + W_t + p_t = D + r_t, \quad t = 1, \dots, 24.$$

Vi måste även ange den undre gränsen för de nya optimeringsvariablerna:

$$0 \leq G_{1,j,t}, \quad j = 1, 2, t = 1, \dots, 24.$$

Notera slutligen att eftersom det är mer lönsamt att producera i segment 1 än i segment 2 så det behövs ingen extra heltalsvariabel för att garantera att $G_{1,2} = 0$ då $G_{1,1} < \bar{G}_{1,1}$.

Uppgift 9

a) Tariffen om A/ECCO väljer att bygga vattenkraftverket kan enkelt uppskattas direkt från givna data. Detta beror på att de maximala förlusterna är $0,00015 \cdot 800^2 = 96$ kW, vilket innebär att även om man tar hänsyn till förlusterna så kommer vattenkraftverket alltid att ha tillräcklig kapacitet för att täcka lasten i Akabuga och därmed är de rörliga driftkostnaderna alltid försämbara.

Alternativet med diesलगeneratorer passar utmärkt för stokastisk produktionskostnadssimulering. Utmaningen med att genomföra en sådan simulering i detta sammanhang är att det kräver en hel del beräkningar för att få fram varaktighetskurvan för den ekvivalenta lasten. Detta kan man antingen lösa genom att använda en lämplig diskret approximation av den kontinuerliga varaktighetskurvan som är given i uppgiften. Genom att strunta i delberäkningar som inte har någon betydelse för slutresultatet kan man dock genomföra simuleringen även med den kontinuerliga varaktighetskurvan. För att beräkna den förväntade elproduktionen i diesलगeneratorerna behöver vi $EENS$ med respektive utan de tre diesलगeneratorerna, d.v.s.

$$T \int_0^{\infty} \tilde{F}_0(x) dx$$

respektive

$$T \int_0^{\infty} \tilde{F}_3(x) dx.$$

Det första uttrycket är givet, medan det andra kräver att vi beräknar varaktighetskurvan för den ekvivalenta lasten inklusive bortfall i alla tre diesलगeneratorer för intervallet $x \geq 750$. För att ytterligare spara beräkningsarbete kan vi behandla de tre diesलगeneratorerna som ett enda kraftverk med fyra möjliga tillstånd (de har ju samma driftkostnad, så det finns ingen anledning i det här fallet att göra någon skillnad mellan dem).

b) För att simulera alternativet med diesलगeneratorer väljer vi så som beskrivits ovan att behandla de tre diesलगeneratorerna som ett kraftverk med fyra tillstånd. Sannolikheten för varje tillstånd kan sammanställas ur nedanstående tabell:

Diesलगenerator 1	0	250	0	250	0	250	0	250
Diesलगenerator 2	0	0	250	250	0	0	250	250
Diesलगenerator 3	0	0	0	0	250	250	250	250
Total kapacitet	0	250	250	500	250	500	500	750
Sannolikhet	$0,1^3 = 0,001$	$0,1^2 \cdot 0,9 = 0,009$	$0,1^2 \cdot 0,9 = 0,009$	$0,9^2 \cdot 0,1 = 0,081$	$0,1^2 \cdot 0,9 = 0,009$	$0,9^2 \cdot 0,1 = 0,081$	$0,9^3 = 0,729$	$0,729$

Den ekvivalenta varaktighetskurvan inklusive bortfall i alla tre diesलगeneratorerna ges därmed av

$$\tilde{F}_3(x) = 0,729 \tilde{F}_0(x) + 0,243 \tilde{F}_0(x - 250) + 0,027 \tilde{F}_0(x - 500) + 0,001 \tilde{F}_0(x - 750).$$

Därmed kan vi beräkna

$$\begin{aligned} EENS_0 &= 8\,760 \int_0^{\infty} \tilde{F}_0(x) dx = 8\,760 \cdot (1 \cdot 200 + (1 + 0,2) \cdot 2 \cdot 200 + 0,2 \cdot 2 \cdot 300) = 8\,760 \cdot 350 = \\ &= 3,066 \text{ GWh/år.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EENS_3 &= 8\,760 \int_0^{\infty} \tilde{F}_3(x) dx = \\ &= 8\,760 \int_0^{\infty} (0,729 \tilde{F}_0(x) + 0,243 \tilde{F}_0(x - 250) + 0,027 \tilde{F}_0(x - 500) + 0,001 \tilde{F}_0(x - 750)) dx = \\ &= 8\,760 \left(\int_0^{\infty} 0,729 \tilde{F}_0(x) dx + \int_0^{\infty} 0,243 \tilde{F}_0(x) dx + \int_0^{\infty} 0,027 \tilde{F}_0(x) dx + \int_0^{\infty} 0,001 \tilde{F}_0(x) dx \right) = \\ &= 8\,760 (0,729 \cdot 350 + 0,243 \cdot (0,1667 \cdot 2 \cdot 200) + 0,027 \cdot (0,8 + 0,2) \cdot 2 \cdot 150 + 0,2 \cdot 2 \cdot 300) \\ &\quad + 0,001 \cdot (1 \cdot 200 + (1 + 0,2) \cdot 2 \cdot 200 + 0,2 \cdot 2 \cdot 300) = 0,056 \text{ GWh/år,} \end{aligned}$$

vilket ger den förväntad elproduktion i diesलगeneratorerna $EC_3 = EENS_3 - EENS_0 = 3,010$ GWh/år. De rörliga driftkostnaderna för detta alternativ blir således $30,10$ M€ /år. Om man i stället väljer att bygga vattenkraftverket så får man inga rörliga driftkostnader, men en ytterligare fast kostnad på 25 M€ /år. De totala kostnaderna blir alltså lägre med vattenkraftverket och kommer dessutom att fördelas på en något större försäljningsvolym (den ickelevererade energin är ju försämbart för vattenkraftverket medan den uppgår till ungefär 56 MWh/år för diesलगeneratorerna). Således kan vi dra slutsatsen att vattenkraftverket är det bättre alternativet, utan att ens räkna på övriga kostnader.