KS1

1.

2.

3.

KS2

1. a) Eftersom B är en triangulär matris är determinanten av B lika med produkten av diagonalelementen,

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Med determinanträkwereglerna kan vi förenkla determinantuttrycket,

$$\begin{aligned} \det(A^3 B^T A^{-1}) &= \det(A^3) \cdot \det(B^T) \cdot \det(A^{-1}) \\ &= (\det A)^3 \cdot \det B \cdot (\det A)^{-1}, \end{aligned}$$

och därmed är

$$\det(A^3 B^T A^{-1}) = (-3)^3 \cdot 2 \cdot (-3)^{-1} = 18.$$

b) Vi förenklar först matrisuttrycket

$$(A + AB^T)^{-1} A = (A(E + B^T))^{-1} A = (E + B^T)^{-1} A^{-1} A = (E + B^T)^{-1}.$$

Matrisen $E + B^T$ är lika med

$$E + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

och vi bestämmer dess invers med ett räkneschema

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} - \; - \; \text{-2} \; \tfrac{1}{2} \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ - \; \tfrac{1}{3} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{-2} \; \tfrac{1}{2} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 & 1
\end{array}\right) \frac{1}{2} \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right).
$$

Alltså är

$$
(A + AB^T)^{-1}A = (E + B^T)^{-1} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}.
$$

c) Genom att flytta över termerna som innehåller X till vänsterledet och konstanttermen till högerledet får vi

$$
AX - X = B,
$$

där $B = (1\;\;2\;\;3\;\;0)^T$. Vi kan faktorisera vänsterledet till $(A-E)X$ och om $A-E$ är en inverterbar matris har matrisekvationen lösningen

$$
X = (A-E)^{-1}B.
$$

Vi har

$$
\det(A-E) = \begin{vmatrix}
1 & 1 & 3 & 0 \\
3 & 1 & 5 & 4 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 2 & 1
\end{vmatrix} \begin{array}{l} -3 \quad - \quad -3 \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix}
1 & 1 & 3 & 0 \\
0 & -2 & -4 & 4 \\
0 & 0 & -2 & 1 \\
0 & -3 & -7 & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
= \left\{ \text{Kofaktorutveckling längs första kolumnen} \right\}
$$

$$
= 1 \cdot \begin{vmatrix}
-2 & -4 & 4 \\
0 & -2 & 1 \\
-3 & -7 & 1
\end{vmatrix} = \{\text{Sarrus regel}\} = 4 + 12 + 0 - 24 - 14 - 0 = -22
$$

och eftersom determinantens värde är skild från noll är matrisen $A-E$ inverterbar. Ett Matlab-program som löser matrisekvationen är alltså

```
A = [2 1 3 0; 3 2 5 4; 1 1 2 1; 3 0 2 2];
B = [1; 2; 3; 0];
X = (A-eye(4))\B
```

2. a) För att skriva linjen i parameterform behöver vi

1. en punkt på linjen,
2. en vektor parallell med linjen.

Som punkt på linjen väljer vi $P = (4, -1, 3)$ och en vektor parallell med linjen är $v = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (6, -2, 7) - (4, -1, 3) = (2, -1, 4)$. En parameterform för linjen är därför

$$
(x, y, z) = (4, -1, 3) + t\,(2, -1, 4).
$$

b) Vi kan se planets ekvation som ett linjärt ekvationssystem

$$2x - y + 3z = 1.$$

Lösningen till detta enkla ekvationssystem är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -1 + 2s + 3t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där s och t är parametrar, vilket också är en parameterform för planet.

c) Skärningspunkten (x_0, y_0, z_0) är den punkt som både ligger på linjen och planet. Det finns alltså ett parametervärde t så att

$$(x_0, y_0, z_0) = (4, -1, 3) + t\,(2, -1, 4).$$

Skärningspunkten ska också uppfylla planets ekvation,

$$\begin{aligned} 2x_0 - y_0 + 3z_0 &= 2(4 + 2t) - (-1 - t) + 3(3 + 4t) \\ &= 8 + 4t + 1 + t + 9 + 12t \\ &= 18 + 17t \\ &= 1, \end{aligned}$$

vilket ger att $t = -1$ och skärningspunkten är

$$(x_0, y_0, z_0) = (4, -1, 3) + (-1) \cdot (2, -1, 4) = (2, 0, -1).$$

d) Punkten P svarar mot parametervärdet $t = 0$ på linjen ℓ och skärningspunkten svarar mot $t = -1$. Parametervärdet $t = -2$ svarar därför mot en punkt på linjen som ligger på motsatt sida om planet jämfört med P . Ett svar är alltså att $P = (4, -1, 3)$ och punkten $(4, -1, 3) + (-2) \cdot (2, -1, 4) = (0, 1, -5)$ ligger på varsin sida om planet π .

3. Det kortaste avståndet mellan linjen ℓ och den sökta linjen ℓ' är det vinkelräta avståndet, dvs. om P och Q är de punkter på ℓ resp. ℓ' som ligger närmast varandra så är vektorn $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{PQ}$ vinkelrät mot båda linjernas riktningsvektorer.

För att konstruera linjen ℓ' väljer vi punkten $P = (1, 2, 1)$ på ℓ och vektorn $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{PQ}$ som

$$\boldsymbol{w} = 2 \cdot \frac{(1, 0, 1)}{|(1, 0, 1)|} = \sqrt{2}\,(1, 0, 1)$$

vars längd är 2 och som är vinkelrät mot riktningsvektorn $\boldsymbol{u} = (3, 2, -3)$ för linjen ℓ .

Därmed blir $Q = P + \boldsymbol{w} = (1, 2, 1) + \sqrt{2}\,(1, 0, 1) = (1 + \sqrt{2}, 2, 1 + \sqrt{2})$. Riktningen $\boldsymbol{v}$ för linjen ℓ' ska vara vinkelrät mot både $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{w}$ och därför väljer vi

$$\boldsymbol{v} = (3, 2, -3) \times (1, 0, 1) = (2, -6, -2).$$

Ett svar är alltså

$$(x, y, z) = (1 + \sqrt{2}, 2, 1 + \sqrt{2}) + t\,(2, -6, -2), \quad (t \text{ parameter}).$$

KS3

1. a) Linjen $y = 2x$ har riktningsvektorn $\boldsymbol{v} = (1, 2)$. Om vi delar upp vektorn $\boldsymbol{u}$ i en komposant parallell med $\boldsymbol{v}$,

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\, \boldsymbol{v} = \frac{(0, 2) \cdot (1, 2)}{1^2 + 2^2}\,(1, 2) = \tfrac{4}{5}(1, 2)$$

och en komposant vinkelrät mot $\boldsymbol{v}$,

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}}^{\perp} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} = (0,2) - \tfrac{4}{5}(1,2) = \tfrac{1}{5}(-4,2),$$

så kommer speglingen att avbilda komposanterna enligt

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} \mapsto \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} \quad \text{och} \quad \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}}^{\perp} \boldsymbol{u} \mapsto -\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}}^{\perp} \boldsymbol{u},$$

och vi får att $\boldsymbol{u} = \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} + \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}}^{\perp} \boldsymbol{u}$ avbildas till

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{u}) = S(\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u}) + S(\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}}^{\perp} \boldsymbol{u}) &= \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}}^{\perp} \boldsymbol{u} \\ &= \tfrac{4}{5}(1,2) - \tfrac{1}{5}(-4,2) \\ &= \tfrac{1}{5}(8,6). \end{aligned}$$

b) Eftersom $S \circ S$ är speglingen utförd två gånger så kommer alla vektorer avbildas på sig själva med $S \circ S$. Avbildningen $S \circ S$ har därför enhetsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

som matris.

2. a) $\mathbf{R}^4$

b) Nollrummet består av alla vektorer $\boldsymbol{v}$ som avbildas på nollvektorn, dvs. $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Lösningarna till denna ekvation får vi med gausseliminering

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Från detta slutschema kan vi avläsa att nollrummet är

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2s + t \\ s \\ -3t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

och en bas är $B = \{(-2,1,0,0), (1,0,-3,1)\}$.

3. a) Att $\overrightarrow{OP}$ har koordinaterna $(0,1,0)$ i basen $B' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ betyder att

$$\overrightarrow{OP} = 0 \cdot \boldsymbol{v}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2,$$

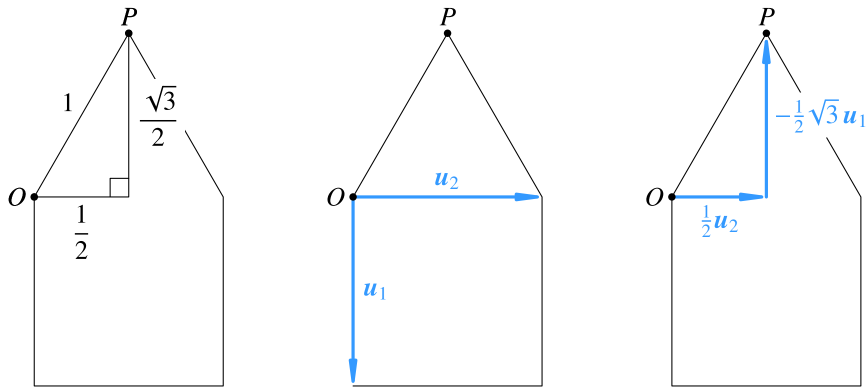
dvs. vi måste välja $\boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{OP}$.

Vidare ska $\overrightarrow{PQ}$ ska ha koordinaterna $(0,1,1)$ i samma bas och det ger att

$$\overrightarrow{PQ} = 0 \cdot \boldsymbol{v}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + 1 \cdot \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3,$$

dvs. $\boldsymbol{v}_3 = \overrightarrow{PQ} - \boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{OP}$.

Vektorerna $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{OP}$ har koordinaterna $(0, 0, 1)$ resp. $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0)$ i basen B.



Alltså ska vi välja

$$(v_2)_B = (\overrightarrow{OP})_B = (-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}, 0),$$
$$(v_3)_B = (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{OP})_B = (\overrightarrow{PQ})_B - (\overrightarrow{OP})_B = (0, 0, 1) - (-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}, 0) = (\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, -\tfrac{1}{2}, 1).$$

Den första basvektorn v_1 kan vi välja fritt förutsatt att $\{v_1, v_2, v_3\}$ är linjärt oberoende. T.ex. kan vi välja $v_1 = u_1$, vilket betyder att

$$(v_1)_B = (u_1)_B = (1, 0, 0).$$

b) Vi har att

$$P_{B\leftarrow B'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ (v_1)_B & (v_2)_B & (v_3)_B \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och får att

$$P_{B'\leftarrow B} = (P_{B\leftarrow B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$