Lösningsförlag till Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 2) den 12 mars 2014 kl 8:00 - 13:00.

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonus från kontrollskrivningen gäller uppgift (1).
Preliminära betygsgränser: 14 poäng ger garanterat betyg E, 17 poäng ger garanterat betyg D, 21 poäng ger garanterat betyg C, 24 poäng ger garanterat betyg B och 28 poäng ger garanterat betyg A. Den som har 13 poäng får betyg Fx och har möjlighet att komplettera. Kontakta i så fall examinatorn.
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *BETA, Mathematics Handbook*.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar. Markera dina svar tydligt.

(1) Använd variabelseparation för att hitta en lösning till randvärdesproblemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + u, \quad u(x,0) = \frac{e^x}{2}.$$

Lösning: Vi söker en lösning på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Då har vi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)T(t).$$

Insättning i ekvationen ger oss

$$X(x)T'(t) = X'(x)T(t) + X(x)T(t)$$

vilket leder till

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X'(x)}{X(x)} + 1.$$

Eftersom HL är oberoende av t, och VL är oberoende av x, så måste vi ha

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X'(x)}{X(x)} + 1 = -\lambda$$

där λ är en konstant. Detta ger oss de två ekvationerna

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \quad X'(x) + (1+\lambda)X(x) = 0.$$

Den första av dessa har den allmänna lösningen $T(t) = c_1 e^{-\lambda t}$, och den andra har lösningen $X(x) = c_2 e^{-(1+\lambda)x}$.

Således, för varje val av C och λ är

$$u(x,t) = X(x)T(t) = Ce^{-\lambda t}e^{-(1+\lambda)x}$$

en lösning till PDEn. Vi söker en lösing som också uppfyller randvillkoret. Eftersom

$$\frac{e^x}{2} = u(x,0) = Ce^{-\lambda 0}e^{-(1+\lambda)x} = Ce^{-(1+\lambda)x}$$

väljer vi $C = \frac{1}{2}$ och $\lambda = -2$. Alltså,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}e^{2t}e^{x} = \frac{1}{2}e^{2t+x}$$

är en lösning till randvärdesproblemet.

(2) a) Bestäm talen a_n och b_n, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, om $a_0 = 0, b_0 = 0$ och

$$\begin{cases} 2a_{n+1} + b_n = 4 \\ 2a_n + b_{n+1} = 0 \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

b) Verifiera, genom insättning, att svaret i a) verkligen är en lösning.

Lösning: a) Om vi Z-transformerar ekvationerna, och använder begynnelsevillkoren, fås

$$2zA(z) + B(z) = \frac{4}{z-1}$$

och

$$2A(z) + zB(z) = 0.$$

Från den andra ekvationen får vi $2A(z) = -zB(z)$. Sätter vi in detta i den första ekvationen fås

$$-z^2B(z) + B(z) = \frac{4z}{z-1}$$

vilket ger

$$B(z) = \frac{4z}{(z-1)(1-z^2)} = -\frac{4z}{(z-1)^2(z+1)}.$$

Partialbråksuppdelning av HL ger (det är taktiskt att bryta ut z för att underlätta inverstransformeringen)

$$-\frac{4z}{(z-1)^2(z+1)} = z\left(\frac{-4}{(z-1)^2(z+1)}\right) = z\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} - \frac{2}{(z-1)^2}\right) =$$

$$= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+1} - \frac{2z}{(z-1)^2}.$$

Beta ger nu

$$b_n = 1 - (-1)^n - 2n.$$

Vidare har vi (från den andra ekvationen)

$$a_n = -\frac{b_{n+1}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} + (n+1).$$

b) Vi verifierar att första ekvationen också är uppfylld. Notera att vi enligt formeln ovan har

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+2}}{2} + (n+2).$$

Vi får

$$2a_{n+1} + b_n = (-1 + (-1)^{n+2} + 2(n+2)) + (1 - (-1)^n - 2n) = 4$$

eftersom $(-1)^{n+2} = (-1)^n$. Allstså, a_n, b_n är en lösning till systemet.

(3) Bestäm en funktion f som uppfyller

$$\int_{-1}^{1} f(t-y)dy = e^{-|t-1|} - e^{-|t+1|} \text{ för alla } t \in \mathbb{R}.$$

Lösning: Vi tolkar VL som en faltning $f * g$, där

$$g(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1 \\ 0, & |y| \geq 1. \end{cases}$$

Fouriertransformering ger

$$\widehat{f}(\omega) \cdot \frac{2\sin\omega}{\omega} = e^{-i\omega}\frac{2}{1+\omega^2} - e^{i\omega}\frac{2}{1+\omega^2}$$

Här har vi använt F50 samt F41a kombinerat med F7. HL kan skrivas

$$\frac{2(e^{-i\omega} - e^{i\omega})}{1+\omega^2} = \frac{2(-2i\sin\omega)}{1+\omega^2}.$$

Således får vi

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{-2i\omega}{1+\omega^2}.$$

F42a ger nu att

$$f(t) = -2i\left(\frac{i}{2}e^{-|t|}\text{sgn } t\right) = e^{-|t|}\text{sgn } t,$$

där sgn $t = |t|/t$.

(4) a) Låt distributionen $f \in \mathcal{S}'$ vara definierad genom $f[\varphi] = \varphi(1)$, och låt $g(x) = x^2 - x$. Använd definitionen av produkten $gf \in \mathcal{S}'$ för att bestämma gf.
b) Använd Fouriertransformens definition (i distributionsmening) för att bestämma $\widehat{f}$ då $f(x) = 2$.

Lösning: a) Enligt definition (se sid 207 i Vretblad) har vi

$$(gf)[\varphi] = f[g\varphi] = \{\text{definitionen av } f\} = g(1)\varphi(1) = 0$$

för varje testfunktion $\varphi \in \mathcal{S}$. Alltså, $gf = 0$.

b) Svar: $\widehat{f} = 4\pi\delta$. Se exempel 8.27 i Vretblad.

(5) Hitta en lösning till problemet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin 2x, & 0 < x < \pi,\ t > 0; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0; \\ u(x,0) = \sin x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Lösning: (Se också exempel 6.3, sid 142-143, i Vretblad.) Eftersom ekvationen inte är homogen föröker vi först överföra problemet på ett homogent problem. Vi söker därför en lösning på formen

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x).$$

Insättning i PDEn ger

$$v_t = v_{xx} + \varphi''(x) + \sin 2x.$$

Randvilkoren $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ blir

$$0 = v(0,t) + \varphi(0) = v(\pi,t) + \varphi(\pi).$$

Vi vill alltså hitta φ sådan att

$$\varphi''(x) = -\sin 2x, \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0,$$

dvs

$$\varphi(x) = \frac{\sin 2x}{4}.$$

Begynnelsevillkoret $u(x,0) = \sin x$ blir

$$\sin x = v(x,0) + \varphi(x) = v(x,0) + \frac{\sin 2x}{4},$$

dvs

$$v(x,0) = \sin x - \frac{\sin 2x}{4}.$$

Vi söker således en lösning $v(x,t)$ till det homogena problemet

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0; \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0, & t > 0; \\ v(x,0) = \sin x - \frac{\sin 2x}{4}, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Att lösa detta problem är standard (se avsnitt 1.4 i Vretblad). Vi får att för varje $n = 1, 2, 3, \ldots$, och varje val av konstanten b_n så är

$$v_n(x,t) = b_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

en lösning till de två första villkoren. Eftersom problemet är homogent så är varje linjärkombination

$$\sum_{n=1}^{N} b_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

också en lösning. Vi ser därför att vi speciellt har att

$$v(x,t) = e^{-t}\sin x - \frac{1}{4}e^{-4t}\sin 2x$$

är en lösning till de två första villkoren. Denna lösning uppfyller också det sista begynnelsevillkoret.

Vi har således hittat en lösning till det ursprungliga problemet, nämligen

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x) = e^{-t}\sin x - \frac{1}{4}e^{-4t}\sin 2x + \frac{\sin 2x}{4}.$$

(6) Låt

$$K_n(t) = \begin{cases} n, & \text{om } |t| < \frac{1}{2n} \\ 0, & \text{om } |t| \geq \frac{1}{2n} \end{cases}$$

och antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion. Visa detaljerat, utan att bara referera till en sats, att

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} K_n(t)f(t)dt = f(0).$$

Lösning: Detta är ett specialfall av Sats 2.1 (Vretblad, sid 22-23).

Vi vill visa att för varje $\varepsilon > 0$ så finns $N > 0$ sådant att

$$\left| \int_{-1}^{1} K_n(t)f(t)dt - f(0) \right| < \varepsilon$$

för alla $n > N$.

Fixera $\varepsilon > 0$. Vi noterar att $\int_{-1}^{1} K_n(t)dt = 1$ för varje n, så vi kan skriva

$$\int_{-1}^{1} K_n(t)f(t)dt - f(0) = \int_{-1}^{1} K_n(t)f(t)dt - f(0)\int_{-1}^{1} K_n(t)dt =$$
$$= \int_{-1}^{1} K_n(t)(f(t) - f(0))dt.$$

Eftersom f är kontinuerlig i $t = 0$, så det finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$ för varje $|t| < \delta$. Detta ger

$$\left| \int_{-1}^{1} K_n(t)f(t)dt - f(0) \right| = \left| \int_{-1}^{1} K_n(t)(f(t) - f(0))dt \right| \leq$$
$$\leq \int_{-1}^{1} K_n(t)|f(t) - f(0)|dt = \{\text{använd definitionen av } K_n\} =$$
$$= \int_{-1/n}^{1/n} n|f(t) - f(0)|dt < \varepsilon \int_{-1/n}^{1/n} n dt = \varepsilon$$

för varje $n > 0$ sådant att $1/n < \delta$, dvs för alla $n > 1/\delta$. Detta bevisar påståendet.

(7) Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och att det finns ett tal $M > 0$ sådant att $f(t) = 0$ för alla $|t| > M$. Visa att Fouriertransformen $\widehat{f}(\omega)$ är kontinuerlig. (Tips: titta på $\widehat{f}(\omega + h) - \widehat{f}(\omega)$.)

Lösning: Eftersom f speciellt är kontinuerlig på det kompakta intervallet $[-M, M]$ så finns det ett $K > 0$ sådant att

$$|f(t)| \leq K, \quad |t| \leq M.$$

Vi vet att $f(t) = 0$ för $|t| > 0$ så

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-M}^{M} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

För att visa att $\widehat{f}$ är kontinuerlig så ska vi visa att för varje $\omega \in \mathbb{R}$ så

$$\lim_{h \to 0} \widehat{f}(\omega + h) = \widehat{f}(\omega).$$

Vi noterar att

$$\left|\widehat{f}(\omega + h) - \widehat{f}(\omega)\right| = \left|\int_{-M}^{M} f(t)(e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t})dt\right| =$$

$$= \left|\int_{-M}^{M} f(t)e^{-i\omega t}(e^{-iht} - 1)dt\right| \leq \int_{-M}^{M} |f(t)||e^{-iht} - 1|dt \leq$$

$$\leq 2MK \max_{-M \leq t \leq M} |e^{-iht} - 1|.$$

Eftersom $e^{-ik} \to 1$ då $k \to 0$ så följer att $\max_{-M \leq t \leq M} |e^{-iht} - 1| \to 0$ då $h \to 0$, och alltså har vi

$$\left|\widehat{f}(\omega + h) - \widehat{f}(\omega)\right| \to 0 \text{ då } h \to 0.$$

Således har vi visat att $\widehat{f}$ är kontinuerlig.

(8) a) Antag att $f \in C(\mathbb{T})$ och $g \in C(\mathbb{T})$ (dvs f och g är kontinuerliga och 2π-periodiska). Visa att om f och g har samma Fourierkoefficienter så är $f(t) = g(t)$ för alla $t \in \mathbb{R}$. (Tips: betrakta funktionen $\varphi(t) = f(t) - g(t)$.)
b) Vilka funktioner $f \in C(\mathbb{T})$ uppfyller $f(t + 1) = f(t)$ för alla $t \in \mathbb{R}$?

Lösning: a) Låt $\varphi(t) = f(t) - g(t)$, och låt c_n beteckna φ:s Fourierkoefficienter. Eftersom f och g har samma Fourierkoefficienter så har vi $c_n = 0$ för alla $n \in \mathbb{Z}$. Enligt Parsevals formel har vi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = 0.$$

Eftersom φ är kontinuerlig, och ovanstående integral är 0, så måste $\varphi(t) = 0$ för alla t. Alltså följer det att $f(t) = g(t)$ för alla t.

b) Antag att $f \in C(\mathbb{T})$ uppfyller $f(t+1) = f(t)$. Låt

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

vara f:s Fourierkoefficienter. Funktionen $\psi(t) = f(t+1) - f(t)$ är enligt antagandet identiskt noll. Eftersom funktionen $h(t) = f(t+1)$ har Fourierkoefficienterna

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+1) e^{-int} dt = \{\text{samtliga funktioner är } 2\pi\text{-periodiska}\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-in(u-1)} du = c_n e^{in},$$

så får vi, om vi beräknar ψ:s Fourierkoefficienter,

$$0 = c_n e^{in} - c_n = c_n (e^{in} - 1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Notera att $e^{it} = 1$ omm $t = k \cdot 2\pi$. Eftersom π är irrationellt så har vi att $e^{in} \neq 1$ för alla $n \neq 0$. Således har vi $e^{in} - 1 \neq 0$ för alla $n \neq 0$, så likheten ovan medför att vi måste ha $c_n = 0$ för alla $n \neq 0$. För $n = 0$ har vi $e^{in} - 1 = 0$, så c_0 kan vara vad som helst.

Eftersom f och den konstanta funktionen $g(t) = c_0$ har samma Fourierkoefficienter så följer det från a) att $f(t) = g(t) = c_0$ för alla t, dvs f är konstant.