KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2014-03-17

DEL A

1. Betrakta funktionen $f(x, y) = \sqrt{10 - x^2 - 2y^2}$.
   (a) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(1, 2)$ i den riktning som ges av vektorn $(4, 3)$. **(2 p)**
   (b) Finns det någon riktning i vilken riktningsderivatan av f i punkten $(1, 2)$ antar värdet -5? **(2 p)**

Lösning. (a) Riktningsderivatan ges av $f'_{\vec{v}} = \nabla f \cdot \vec{v}$, där $\|\vec{v}\| = 1$. Vi har $\vec{v} = \frac{1}{5}(4, 3)$ och

$$\nabla f = \left(-\frac{x}{\sqrt{10 - x^2 - 2y^2}}, -\frac{2y}{\sqrt{10 - x^2 - 2y^2}}\right).$$

I punkten $(1, 2)$ är $\nabla f = (-1, -4)$ vilket medför att

$$f'_{\vec{v}} = (-1, -4) \cdot \frac{1}{5}(4, 3) = -\frac{16}{5}.$$

(b) Låt α vara vinkeln mellan ∇f och $\vec{v}$, så att

$$f'_{\vec{v}} = \nabla f \cdot \vec{v} = \|\nabla f\| \cdot 1 \cdot \cos \alpha.$$

Eftersom $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ får vi

$$-\|\nabla f\| \leq f'_{\vec{v}} \leq \|\nabla f\|.$$

I punkten $(1, 2)$ är $\|\nabla f\| = \sqrt{17}$. Eftersom $-5 < -\sqrt{17}$ antas inte värdet -5 för någon riktning.

$\square$

2. Visa att $(1,-1)$ är en stationär punkt till funktionen $f(x,y) = y^2 + 2x^2y + 2x^2$ och avgör dess typ. **(4 p)**

Lösning. Vi beräknar de partiella derivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x^2.$$

Genom insättning ser vi att

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = 0$$

vilket visar att $(1,-1)$ är en stationär punkt.

För att avgöra vilken typ av stationär punkt det är betraktar vi den kvadratiska formen

$$Q(h_1,h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)h_2^2$$

i punkten $(a,b) = (1,-1)$. Vi har att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y + 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

så

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,-1) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1) = 2.$$

Den kvadratiska formen Q blir alltså

$$Q(h_1,h_2) = 8h_1h_2 + 2h_2^2,$$

vilket vi kvadratkompletterar till

$$Q(h_1,h_2) = 2\left(h_2 + 2h_1\right)^2 - 8h_1^2.$$

Detta är en indefinit kvadratisk form, och vi drar slutsatsen att punkten $(1,-1)$ är en sadelpunkt. $\square$

3. Beräkna volymen av det område som är under paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ och ovanför det område i xy-planet som bestäms av olikheterna $-x \leq y \leq \sqrt{3}x$. **(4 p)**

Lösning. Paraboloiden skär xy-planet då $z = 0$, skärningskurvan är alltså cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

Volymen ges av

$$V = \iint_D \big(1 - (x^2 + y^2)\big)\ dxdy$$

Där D är den cirkelsektor i högra halvplanet som begränsas av linjerna $y = -x$ och $y = \sqrt{3}x$ samt cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

Låt α vara vinkeln mellan x-axeln och linjen $y = \sqrt{3}x$. Då gäller att $\tan\alpha = \sqrt{3}$ så $\alpha = \pi/3$. Vinkeln mellan x-axeln och linjen $y = -x$ är $-\pi/4$.

Med polära koordinater r och ϕ får vi

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\pi/4}^{\pi/3} \left(\int_0^1 \big(1 - r^2\big)\, r\, dr \right) d\phi \\ &= \left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{7\pi}{12} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{7\pi}{48}. \end{aligned}$$

$\square$

DEL B

4. (a) Formulera Greens formel. Ange alla förutsättningar. **(1 p)**

(b) Använd Greens formel för att beräkna linjeintegralen

$$\oint_\gamma (x-y^2)\,dx + (x^2+y^2)\,dy$$

där γ är den kurva som sammansätts av parabeln $y = x^2$ från punkten $(-1,1)$ till punkten $(1,1)$ och den räta linjen därifrån tillbaka till punkten $(-1,1)$. **(3 p)**

Lösning. (a) Se kursboken sidan 335.

(b) Vi har

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(x-y^2\right) = -2y.$$

Greens formel ger alltså att

$$\oint_\gamma (x-y^2)\,dx + (x^2+y^2)\,dy = \iint_D 2(x+y)\,dxdy$$

där D är området i xy-planet som beskrivs av $-1 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le 1$. På grund av symmetri är $\iint_D 2x\,dxdy = 0$, så vi får att

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma (x-y^2)\,dx + (x^2+y^2)\,dy &= \iint_D 2y\,dxdy \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1} 2y\,dy\right)dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\left[y^2\right]_{x^2}^{1}\right)dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left(1-x^4\right)dx \\
&= \left[x - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

□

5. Bestäm det största och minsta värde som funktionen $f(x,y) = x(y-1)$ antar i det område som ges av $1 \le x^2 + y^2 \le 3$. **(4 p)**

Lösning. Eftersom funktionen f är ett polynom är den en kontinuerlig funktion och eftersom dessutom området är kompakt (slutet och begränsat) vet vi att största och minsta värde antas i en av följande punkter:

(a) inre stationära punkter,
(b) randpunkter som uppfyller Lagrangevillkoret,
(c) singulära randpunkter.

Vi undersöker dessa tre fall.

(a) I en stationär punkt är

$$\nabla f = (y-1, x) = (0,0).$$

Vi ser att detta bara inträffar då $(x,y) = (0,1)$, vilket är en punkt på randen och inte i det inre till området.

(b) De två randcirklarna till området kan skrivas som

$$g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad \text{resp.} \quad g_2(x,y) = x^2 + y^2 - 3 = 0,$$

och Lagrangevillkoret är uppfyllt i punkter där ∇f är parallell med ∇g_1 resp. ∇g_2. Detta kan vi uttrycka med villkoret

$$\begin{aligned} 0 &= \det\begin{pmatrix} -\nabla f- \\ -\nabla g_i- \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} y-1 & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \\ &= 2y(y-1) - 2x^2 \\ &= 2(y^2 - x^2 - y). \end{aligned}$$

På den inre randcirkeln har vi $x^2 = 1 - y^2$. Detta insatt i Lagrangevillkoret $y^2 - x^2 - y = 0$ ger

$$y^2 - (1 - y^2) - y = 2y^2 - y - 1 = 0$$

vilket har lösningarna $y = -1/2$ och $y = 1$. Vi får alltså tre punkter $(\pm\sqrt{3}/2, 1)$, $(0,1)$ på den inre randcirkeln.
På den yttre randcirkeln är $x^2 = 3 - y^2$, och detta ger

$$y^2 - (3 - y^2) - y = 2y^2 - y - 3 = 0.$$

Vi hittar lösningarna $y = -1$ och $y = 3/2$ vilket ger fyra punkter $(\pm\sqrt{2}, -1)$, $(\pm\sqrt{3}/2, 3/2)$.

(c) En punkt på randkurvan $g_1 = 0$ är en singulär punkt om $\nabla g_i = 0$. Eftersom $\nabla g_i = (2x, 2y)$ ser vi att detta bara inträffar i origo, som inte ligger på randen.

Funktionen antar alltså sitt största och minsta värde i någon av punkterna $(\pm\sqrt{3}/2, 1)$, $(0, 1)$, $(\pm\sqrt{2}, -1)$, $(\pm\sqrt{3}/2, 3/2)$. Eftersom

$$\begin{aligned} f(\pm\sqrt{3}/2, 1) &= 0, \\ f(0, 1) &= 0, \\ f(\pm\sqrt{2}, -1) &= \mp 2\sqrt{2}, \\ f(\pm\sqrt{3}/2, 3/2) &= \pm\sqrt{3}/4 \end{aligned}$$

så drar vi slutsatsen att

- största värde är $2\sqrt{2}$ och antas i punkten $(-\sqrt{2}, -1)$,
- minsta värde är $-2\sqrt{2}$ och antas i punkten $(\sqrt{2}, -1)$.

$\square$

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (-y, x, z^2)$ ned genom konytan som beskrivs av $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z \leq 1$. **(4 p)**

Lösning. Vi vill beräkna flödet genom att använda divergenssatsen och slutar därför till konytan S genom att lägga till cirkelskivan S_1 som beskrivs av $x^2+y^2 \leq 1$, $z = 1$.

Divergensen av vektorfältet $\mathbf{F}$ är

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z^2\right) = 0 + 0 + 2z = 2z.$$

Divergenssatsen ger att

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K 2z\,dxdydz$$

där K är det inneslutna området.

Volymsintegralen blir

$$\iiint_K 2z\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 2z\,dz\right) dxdy = \iint_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dxdy$$

där D är områdets projektion på cirkelskivan, dvs. cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 1$. I polära koordinater blir denna integral

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \left(1-r^2\right) r\,dr\right) d\phi = 2\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Vi beräknar nu flödet genom ytan S_1 där $\hat{N} = (0,0,1)$. Detta flöde ges av

$$\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iint_{S_1}(-y,x,1)\cdot(0,0,1)\,dS = \iint_{S_1} dS = \pi.$$

Slutligen får vi

$$\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz - \iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\hat{N}\,dS = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

$\square$

DEL C

7. Betrakta ekvationen
$$x^y + y = 3$$
i området $x, y > 0$. Visa att i en omgivning av punkten $(1, 2)$ så definierar denna ekvation y som en funktion av x, alltså $y = f(x)$. Beräkna också $f'(1)$. **(4 p)**

Lösning. Sätt $F(x, y) = x^y + y$. Då är $F(1, 2) = 3$ så $(1, 2)$ uppfyller ekvationen och F är en C^1-funktion i en omgivning av $(1, 2)$. Vidare är
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y \ln x} + y\right) = \ln x e^{y \ln x} + 1 = \ln x x^y + 1$$
så
$$\frac{\partial F}{\partial y}(1, 2) = (\ln 1) \cdot 1^2 + 1 = 1 \neq 0.$$
Implicita funktionssatsen säger oss nu att det finns en öppen omgivning U av $(1, 2)$ där sambandet $F(x, y) = x^y + y = 3$ definierar y som en funktion av x, $y = f(x)$, där f är en C^1-funktion.

Derivering av identiteten
$$x^{f(x)} + f(x) = e^{f(x) \ln x} + f(x) = 3$$
ger
$$\left(f'(x) \ln x + f(x)\frac{1}{x}\right) x^{f(x)} + f'(x) = 0$$
Sätter vi in $x = 1$ och $f(1) = 2$ får vi
$$\left(f'(1) \cdot 0 + f(1)\frac{1}{1}\right) 1^{f(1)} + f'(1) = \left(f'(1) \cdot 0 + 2\frac{1}{1}\right) 1^2 + f'(1) = 2 + f'(1) = 0.$$
Alltså är $f'(1) = -2$. □

8. Halvklotet K: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $z \ge 0$, där R är given har masstätheten
$$\rho(x, y, z) = \frac{\rho_0 c_0 z}{\left(1 + c_0^2(x^2 + y^2 + z^2)\right)^{3/2}}$$
där ρ_0 (kg/m^3) och c_0 (m^{-1}) är fysikaliska konstanter (x, y, z i m). Ge en formel för halvklotets massa. **(4 p)**

Lösning. Klotets massa ges av integralen
$$M = \iiint_K \rho(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_K \frac{\rho_0 c_0 z}{\left(1 + c_0^2(x^2 + y^2 + z^2)\right)^{3/2}}\, dxdydz.$$
För att beräkna denna byter vi till rymdpolära koordinater. Då är $z = r\cos\theta$, $x^2+y^2+z^2 = r^2$, $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le r \le R$, och Jacobianen är $r^2 \sin\theta$. Vi får
$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^R \frac{\rho_0 c_0 r \cos\theta}{\left(1 + c_0^2 r^2\right)^{3/2}} r^2 \sin\theta\, dr \right) d\theta \right) d\phi \\ &= 2\pi\rho_0 c_0 \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \right) \left(\int_0^R \frac{r^3}{\left(1 + c_0^2 r^2\right)^{3/2}}\, dr \right). \end{aligned}$$
Här är
$$\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$
Variabelbytet $1 + c_0^2 r^2 = t$ ger $r^2 = c_0^{-2}(t-1)$ och $rdr = 2^{-1}c_0^{-2}dt$, så
$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{r^3}{\left(1 + c_0^2 r^2\right)^{3/2}}\, dr &= \int_1^{1+c_0^2R^2} \frac{c_0^{-2}(t-1)}{t^{3/2}} 2^{-1} c_0^{-2}\, dt \\ &= \frac{1}{2c_0^4} \int_1^{1+c_0^2R^2} \left(\frac{1}{t^{1/2}} - \frac{1}{t^{3/2}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2c_0^4} \left[\frac{t^{1/2}}{1/2} - \frac{t^{-1/2}}{-1/2} \right]_1^{1+c_0^2R^2} \\ &= \frac{1}{c_0^4} \left[t^{1/2} + t^{-1/2} \right]_1^{1+c_0^2R^2} \\ &= \frac{1}{c_0^4} \left(\sqrt{1 + c_0^2R^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + c_0^2R^2}} - 2 \right). \end{aligned}$$
Tillsammans har vi
$$\begin{aligned} M &= 2\pi\rho_0 c_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c_0^4} \left(\sqrt{1 + c_0^2R^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + c_0^2R^2}} - 2 \right) \\ &= \frac{\pi\rho_0}{c_0^3} \left(\sqrt{1 + c_0^2R^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + c_0^2R^2}} - 2 \right). \end{aligned}$$

Svaret kan skrivas om till

$$
\begin{aligned}
M &= \pi\rho_0 c_0 \left(\frac{2}{c_0^4}\left(\sqrt{1+c_0^2R^2}-1\right) - \frac{R^2}{c_0^2\sqrt{1+c_0^2R^2}} \right) \\
&= \frac{\pi\rho_0 R^2}{c_0\sqrt{1+c_0^2R^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+c_0^2R^2}-1}{\sqrt{1+c_0^2R^2}+1}.
\end{aligned}
$$

$\square$

9. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\, dxdy$$

där D är det område i första kvadranten i xy-planet som begränsas av kurvorna

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 4, \quad xy = 1, \quad xy = 3.$$

(4 p)

Lösning. För att få ett enklare integrationsområde gör vi variabelbytet

$$u = x^2 - y^2, \quad v = xy.$$

Då motsvaras området D i xy-planet av rektangeln

$$1 \le u \le 4, \quad 1 \le v \le 3$$

i uv-planet. För att göra variabelbyte i integralen beräknar vi

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} = 2(x^2+y^2),$$

så att

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{2(x^2+y^2)},$$

och

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{2(x^2+y^2)} dudv.$$

Integralen blir alltså

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dxdy &= \iint_E \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \frac{1}{2(x^2+y^2)}\, dudv \\
&= \iint_E \frac{x^2+y^2}{xy} \cdot \frac{1}{2(x^2+y^2)}\, dudv \\
&= \frac{1}{2} \iint_E \frac{1}{v}\, dudv \\
&= \frac{1}{2} \int_1^3 \left(\int_1^4 \frac{1}{v}\, du \right) dv \\
&= \frac{3}{2} \int_1^3 \frac{1}{v}\, dv \\
&= \frac{3}{2} \int_1^3 \frac{1}{v}\, dv \\
&= \frac{3}{2} \ln 3.
\end{aligned}$$

$\square$