Tentamen i IX1303
2013-06-03 9.00-13.00

Miniräknare: **NEJ**
Hjälpmedel: Formelsamling i Matematik
Tillåtet: Mathematics Handbook (BETA)

Tentan består av två delar

Del 1 Godkäntuppgifter (1-4)
innehåller fyra uppgifter för betyget E.
Varje uppgift kan ge 0-4 poäng

E Minst 9 poäng
Fx 8 poäng
F 0-7 poäng

Del 2 Högreuppgifter (5-8)
innehåller fyra uppgifter för betygen A-D.
Uppgifterna rättas bara om del I är godkänd
Du bestämmer själv hur du disponerar din tid mellan de två delarna

Betyg A-D (del 2)
D Minst 3 poäng
C Minst 6 poäng
B Minst 10 poäng
A Minst 14 poäng

Bedömning

En uppgift som har:
- korrekt metod
- korrekt och fullständig lösning
- rätt och fullständigt svar.
- fullgoda motiveringar
- tydligt dokumenterad metod
- och enkelt kan följas
- och är renskriven

ger normalt **4 poäng.**

En uppgift som har:
- korrekt metod
- korrekt lösning
- rätt svar

ger normalt **3 poäng.**

Lycka till!

A Godkäntuppgifter

Uppgift 1

Bestäm skärningen mellan de tre planen

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 &= 4 \\ -6x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

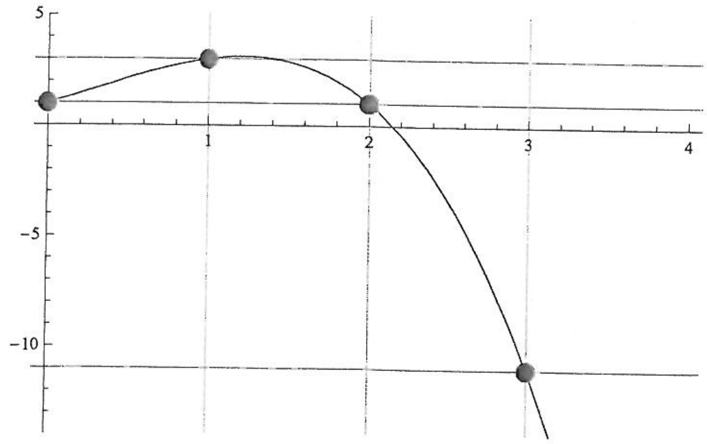
och ange ett uttryck för en godtycklig vektor $\vec{x}$ i lösningsmängden samt beskriv/tolka lösningen geometriskt.

Uppgift 2

Bestäm en ortonormal bas för det underrum som spänns upp av vektorerna $(3, -2, 1)$, $(2,3,0)$ och $(5,1,1)$

Uppgift 3

Bestäm det tredjegradspolynom som går genom de fyra punkterna i figuren. Punkterna har heltalskoordinater.



Uppgift 4

En kvadrat har ett hörn i origo och ligger så att de två närliggande hörnen befinner sig på x- resp. y-axeln. Kvadratens storlek ändras sedan, genom en linjär transformation av de fyra hörnpunkterna, sådan att:

1. kvadratens area blir 3 gånger så stor
2. de två närliggande hörnen fortfarande ligger på samma koordinataxlar som förut
3. kvadraten bibehåller sin kvadratiska form.

Bestäm den transformationsmatris A som utför detta som en transformation $A\vec{x}$.

B Högreuppgifter

Uppgift 5

Bestäm skärningspunkten mellan de två linjerna L_1 och L_2 där

L_1 är parallell med vektorn $(1, -2, 3)$ och går genom punkten $(4,1,6)$.

L_2 går genom punkterna $(2, -2, 9)$ och $(-4, 4, -18)$.

■

Uppgift 6

Lös ekvationssytemet fullständigt och svara på vektorform.

$$
\begin{aligned}
x1 + 2\,x2 - x3 + x4 + x5 &= 1 \\
-x1 - x2 + 2\,x3 - x5 &= 1 \\
x2 + 2\,x3 + x4 + 2\,x5 &= 3 \\
x1 + 2\,x2 + 3\,x3 + 2\,x4 + x5 &= 4
\end{aligned}
$$

■

Uppgift7

Bestäm en ortonormal bas för det underrum som spänns upp av vektorerna

$(1, 2, 4, 6)$ och $(-2, 3, -1, 1)$

Uppgift 8

Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $2 + 2\,i = -z^3$

Uppgift 1

Bestäm skärningen mellan de tre plan som beskrivs av ekvationerna

$x+3y-7z=1,\qquad x-3y-6z=4$ och $-6y+\ z=3$

och beskriv/tolka lösningen geometriskt.

Genom att skriva systemet i form av en totalmatris och reducera får vi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 4 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rad 3 visar att y kan betraktas som fri variabel. Med $z = t$ kan vi då skriva:

$y = -\frac{1}{2} + \frac{t}{6}$ och $x = \frac{5}{2} + \frac{13t}{2}$

vilket ger

$$\vec{v} = \left(\frac{5}{2} + \frac{13t}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{t}{6}, t\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) + t\left(\frac{13}{2}, \frac{1}{6}, 1\right)$$

alltså en linje genom punkten $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ och parallell med vektorn $\left(\frac{13}{2}, \frac{1}{6}, 1\right)$

Uppgift 2

Bestäm en ortonormal bas för det underrum som spänns upp av vektorerna

(3,-2,1), (2,3,0) och (5,1,1)

Vi kan notera att

$(3, -2, 1) + (2, 3, 0) = (5, 1, 1)$; Alltså är den tredje vektorn en linjär kombination av det två första och kan strykas. De två första är ickeparallella och utgör därför en bas.

Vidare kan vi notera att

$(3, -2, 1)\cdot(2, 3, 0) = 0$; Alltså är vektorerna ortogonala. Återstår då att normera basen

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{14}}(3, -2, 1), \frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3, 0)\right\}$$

Uppgift 3

Bestäm det tredjegradspolynom som går genom de fyra punkterna i figuren. Punkterna har heltalskoordinater.

Genom att studera figuren finner vi punkterna {0,1},{1,3},{2,1},{3,-11},

Insättning i polynomet $y(x) = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3$

ger ett ekvationssystem som ger oss värdena på $a,\ b,\ \ldots d$

och polynomet $1 + 2x + x^2 - x^3$.

Uppgift 4

En kvadrat har ett hörn i origo och ligger så att de två närliggande hörnen befinner sig på x- resp. y-axeln. Kvadratens storlek ändras sedan, genom en linjär transformation av de fyra hörnpunkterna, sådan att kvadratens area blir 3 gånger så stor och de två närliggande hörnen fortfarande ligger på samma koordinataxlar som förut. Bestäm den transformationsmatris A som utför detta som en transformation $A\vec{x}$.

Transformationen är en ren skalning. Kvadratens area blir 3 gånger så stor, alltså är den linjära skalningen, i både x- och y-led $\sqrt{3}$.

Alltså får vi $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Uppgift 5

Bestäm skärningspunkten mellan de två linjerna L_1 och L_2 där

L_1 är parallell med vektorn $(1, -2, 3)$ och går genom punkten $(4,1,6)$.

L_2 går genom punkterna $(2, -2, 9)$ och $(-4, 4, -18)$.

Linje 1 kan direkt beskrivas på parameterform

$$v1 = t\,(1, -2, 3) + (4, 1, 6) = (4 + t, 1 - 2t, 6 + 3t)$$

För linje 2 bestämmer vi först en vekor mellan punkterna

$$(-4, 4, -18) - (2, -2, 9) = (6, 6, -27) = 3\,(-2, 2, -9)$$

vilket gör att vi kan skriva linje 2 som

$$v2 = u\,(-2, 2, -9) + \{2, -2, 9\} = (2 - 2u, -2 + 2u, 9 - 9u)$$

?

I skärningspunkten gäller att $v1 = v2$

dvs: $2 - 2u = 4 + t \Leftrightarrow -2u = 2 + t$

och $-2 + 2u = 1 - 2t \Leftrightarrow 2u = 3 - 2t$

alltså $5 - t = 0$ och $t = 5$

Viket ger punkten **(9, −9, 21)**

$u = \frac{3}{2} - t$

$u = \frac{3}{2} - \frac{10}{2}$

$u = -7/2$

$6 + 3t = 9 - 9u$

$3t + 9u = 3$

$t + 3u = 1$

$2 + 7, \; -2 - 7, \; 9 + \frac{9 \cdot 7}{2}$

$-2u = 2 + t$

$2u = -2 - t$

Uppgift 6

$u = -1 - t/2$

$u = -1 - 5/2 \qquad u = -7/2$

$t + 3u = 1$

$5 + 3 \cdot \frac{7}{2} \neq 1$

Lös ekvationssytemet fullständigt och svara på vektorform.

$$\begin{aligned} x1 + 2\,x2 \; - x3 + x4 \; + x5 &= 1 \\ -x1 - x2 + 2\,x3 \qquad - x5 &= 1 \\ x2 + 2\,x3 + x4 + 2\,x5 &= 3 \\ x1 + 2\,x2 + 3\,x3 + 2\,x4 + x5 &= 4 \end{aligned}$$

Systemet $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ kan reduceras till $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -1 \end{pmatrix}$

vikket ger $x = (-1 + x5, 2 - 6\,x5, 1 - 2\,x5, -1 + 8\,x5, \; x5)$

Uppgift7

Bestäm en ortonormal bas för det underrum som spänns upp av vektorerna

$(1, 2, 4, 6)$ och $(-2, 3, -1, 1)$

En ortogonal bas kan skapas genom att projicera den ena vektorn på den andra

$$\frac{(1, 2, 4, 6)\cdot(-2, 3, -1, 1)}{(-2, 3, -1, 1)\cdot(-2, 3, -1, 1)}(-2, 3, -1, 1) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}(-2, 3, -1, 1)$$

Vektorn $\{1, 2, 4, 6\} - \{-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\} = \{\frac{9}{5}, \frac{4}{5}, \frac{22}{5}, \frac{28}{5}\}$ är då ortogonal mot vektorn $(-2, 3, -1, 1)$

Då är även vektorn $v_1 = (9, 4, 22, 28)$ ortogonal mot vektorn $v_2 = (-2, 3, -1, 1)$, och de bildar en ortogonal bas
En ortonormal bas fås om v_1 och v_2 normeras.

Uppgift 8

Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $2 + 2i = -z^3$

$z^3 = -2 - 2i = 8^{1/2}\, e^{i(5\pi/4 + n2\pi)}$

ger

$z = 8^{1/6}\, e^{i(5\pi/12 + n2\pi/3)}$