LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMEN 2 SF1664

Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder
för CFATE1 den 10 mars 2014 kl 08.00-13.00

---

1. Bestäm värdemängden till funktionen

$$f(x) = 2\arctan x + \ln(1+x^2), \text{ där } -\sqrt{3} \leq x \leq 1.$$

För att ge full poäng skall svaret inte innehålla "arctan" (men "ln" går bra).

LÖSNING: Vi observerar att f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet, varför f antar ett största och ett minsta värde samt alla värden däremellan när x varierar i intervallet. Största respektive minsta värde måste antas i en ändpunkt till intervallet eller i en punkt där derivatan är noll eller där derivata saknas. Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2+2x}{1+x^2}$$

som existerar för alla x i intervallet. Vi ser att $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ som ligger i intervallet. Vi ser också att $f'(x)$ är negativ för $x < -1$ och positiv för $x > -1$, så f är strängt avtagande då $-\sqrt{3} < x < -1$ och strängt växande då $-1 < x < 1$. Det följer av detta att funktionen tar sitt minsta värde i punkten $x = -1$ och det minsta värdet är $f(-1) = -\pi/2 + \ln 2$. Det största värdet måste då tas i någon av ändpunkterna. Eftersom $f(-\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{3} + \ln 4 < 0$ medan $f(1) = \frac{\pi}{2} + \ln 2 > 0$ så är funktionens största värde är $f(1) = \pi/2 + \ln 2$.

Funktionens värdemängd består alltså av alla tal y sådana att

$$-\pi/2 + \ln 2 \leq y \leq \pi/2 + \ln 2.$$

SVAR: alla tal y sådana att $-\pi/2 + \ln 2 \leq y \leq \pi/2 + \ln 2$.

2. Beräkna integralen

$$\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx.$$

För att ge full poäng skall svaret inte innehålla namn på trigonometriska funktioner.

LÖSNING: Vi använder variabelsubstitutionen $\sqrt{x} = u$, med $dx/2\sqrt{x} = du$ och nya gränser $\pi/4$ resp $\pi/2$ och får

$$\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,du = 2 - \sqrt{2}.$$

SVAR: $2 - \sqrt{2}$

3. Beräkna två Riemannsummor R_1 och R_2 för integralen

$$\int_0^6 \frac{1}{x^3+1}\,dx,$$

båda med integrationsintervallet indelat i fyra lika långa delar och sådana att R_1 säkert är mindre och R_2 säkert är större än integralens värde. Svaret får ges som en summa av rationella tal (kvoter av heltal).

LÖSNING: Givet ett indelning $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 6$ av integrationsintervallet $[0, 6]$ så är en Riemannsumma till vår integral en summa av typen

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

där, för varje k, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ och $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$. Dessutom är förstås $f(x) = 1/(x^3+1)$.

Vi delar in integrationsintervallet i fyra lika långa delar. Delningspunkterna är då 0, 3/2, 3, 9/2 och 6. Längden av delintervallen är 3/2. Vi observerar att integranden är strängt avtagande, så för att få en Riemannsumma R_1 som är mindre än integralen kan vi välja högra ändpunkten i varje delintervall att ta funktionsvärde i och för att få en Riemannsumma R_2 som är större än integralen så kan vi välja vänstra ändpunkten i varje delintervall.

För R_1 har vi alltså:

$$R_1 = \frac{1}{(3/2)^3+1}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{3^3+1}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{(9/2)^3+1}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{6^3+1}\cdot\frac{3}{2}.$$

För R_2 har vi:

$$R_2 = \frac{1}{0^3+1}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{(3/2)^3+1}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{3^3+1}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{(9/2)^3+1}\cdot\frac{3}{2}.$$

4. a. (2p) Hur många lösningar har ekvationen $x^3 - 3x = 3$?

b. (2p) Bestäm ett närmevärde till varje lösning genom att först välja ett grovt (men inte för grovt) närmevärde x_0 och sedan göra en iteration med Newton-Raphsons metod (dvs approximera med en lämplig tangentlinje i x_0). *Tips: eftersom ni inte har miniräknare kan det vara lämpligt att välja det grova närmevärdet x_0 som ett heltal.*

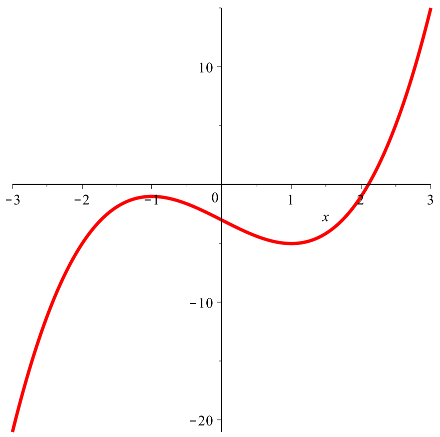
LÖSNING: a. Sätt $f(x) = x^3 - 3x - 3$. Då är $x^3 - 3x = 3$ ekvivalent med att $f(x) = 0$. Vi ser att f är definierad och kontinuerlig för alla x. Vidare är $f'(x) = 3x^2 - 3$ som existerar för alla x. Vi ser att $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Ett teckenstudium av derivatan visar:

Om $x < -1$ så är $f'(x) > 0$ och f strängt växande.

Om $-1 < x < 1$ så är $f'(x) < 0$ och f strängt avtagande.

Om $x > 1$ så är $f'(x) > 0$ och f strängt växande.

Tydligen har f en lokal maxpunkt i $x = -1$ och en lokal minpunkt i $x = 1$. Funktionsvärdet i den lokala maxpunkten -1 är $f(-1) = -1$ och funktionsvärdet i den lokala maxpunkten 1 är $f(1) = -5$. Dessutom är $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ och $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Vi kan nu skissa kurvan $y = f(x)$:



Det följer av ovanstående att $f(x) = 0$ har exakt en lösning (som ligger i intervallet $x > 1$).

b. Eftersom $f(2) = -1$ och $f(3) = 15$ så ger satsen om mellanliggande värden att lösningen ligger mellan 2 och 3. Det kan därför vara lämpligt att välja det grova närmevärdet $x_0 = 2$. Då ger Newton-Raphsons metod att en approximation av ekvationens lösning är

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{-1}{9} = \frac{19}{9} = 2.1111....$$

SVAR: Ekvationen har exakt en lösning och lösningen är ungefär 19/9 eller 2.1111.....

5. Man vill approximera funktionen $f(x) = \sin 2x$ med Maclaurinpolynom.

   a. (2p) Bestäm ett närmevärde till $f(0.1)$ med ett fel vars absolutbelopp är mindre än 0.01.

   b. (2p) Finn ett polynom $p(x)$ som för alla x med $|x| \leq \frac{\pi}{8}$ uppfyller $|p(x) - f(x)| < 10^{-4}$.

LÖSNING: Vi har med hjälp av Taylors formel (standardutveckling kring origo) att

$$\sin t \approx t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

med ett fel som ges av

$$(-1)^{k+1} \frac{\cos c}{(2k+3)!} t^{2k+3}$$

för något c mellan 0 och t.

Om vi här byter ut t mot $2x$ (som är nära noll när x är nära noll) får vi

$$\sin 2x \approx 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

med ett fel som ges av

$$(-1)^{k+1} \frac{\cos c}{(2k+3)!} (2x)^{2k+3}$$

för något c mellan 0 och $2x$.

Uppgift a. Här kan vi välja $k = 0$ i vår formel och få att

$$f(0.1) = \sin 0.2 \approx 0.2.$$

Felet i denna approximation är till beloppet maximalt

$$\frac{1}{3!} 0.2^3 = \frac{4}{3} \cdot 0.001 < 0.01.$$

b. Om vi väljer $k = 3$ i vår formel får vi att

$$f(x) = \sin 2x \approx 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!}$$

där högerledet är vårt polynom $p(x)$. Efter förenkling kan vårt polynom skrivas

$$p(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{8}{315}x^7.$$

Felet vi gör när vi approximerar $f(x)$ med $p(x)$ är, för något c mellan 0 och $2x$,

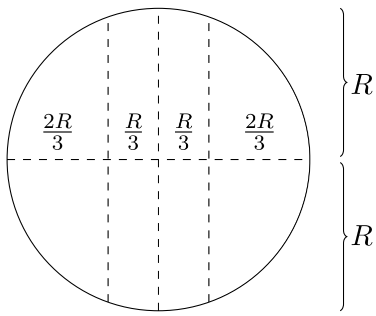
$$(-1)^4 \frac{\cos c}{9!}(2x)^9.$$

Om $|x| \leq \frac{\pi}{8}$ så gäller att absolutbeloppet av felet

$$\left|(-1)^4 \frac{\cos c}{9!}(2x)^9\right| \leq \frac{1}{9!}(2 \cdot \frac{\pi}{8})^9 \leq \frac{1}{9!} = \frac{1}{362880} \leq 10^{-4}.$$

SVAR: a. $f(0.1) \approx 0.2$. b. $p(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{8}{315}x^7$

6. Adam delar en klotformad apelsin med radien R i åtta delar genom att skära fyra snitt enligt figuren härintill. Är bitarna lika stora? Om inte, hur stora är (dvs vilken volym har) de största bitarna?



LÖSNING: Vi väljer ett vanligt koordinatsystem med origo i apelsinens mittpunkt. Vi kan då betrakta apelsinen som den rotationsvolym som uppstår då kurvan $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ roterar runt x-axeln. Om vi begränsar oss till intervallet $-R/3 \leq x \leq R/3$ så får vi de fyra innersta bitarna av den delade apelsinen. Deras sammanlagda volym är enligt formeln för rotationsvolymer:

$$\pi \int_{-R/3}^{R/3} (R^2 - x^2)\, dx = [R^2 x - x^3/3]_{-R/3}^{R/3} = \frac{52\pi R^3}{81}.$$

Var och en av dessa fyra bitar har alltså volymen $13\pi R^3/81$, eftersom de uppenbarligen är lika stora.

Eftersom hela apelsinens volym är $4\pi R^3/3$ så är de övriga bitarnas volym tillsammans $4\pi R^3/3 - 52\pi R^3/81 = 56\pi R^3/81$ så var och en av dem har volymen $14\pi R^3/81$, eftersom de är lika stora. Det är alltså dessa yttre bitar som har störst volym.

SVAR: De yttre bitarna är störst.

7. a. (2p) Definiera vad det innebär att funktionen $f(x)$ är deriverbar i $x = a$.

   b. (2p) Verifiera att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3x^2 \sin(1/x) & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

   är deriverbar för $x = 0$ och beräkna med hjälp av derivatans definition $f'(0)$.

LÖSNING: För a. se läroboken. För b: Med derivatans definition får vi att

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2h + 3h^2 \sin(1/h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + 3h \sin(1/h)) = 2$$

där vi i sista steget har använt att sinusfunktionen är begränsad. Funktionen är alltså deriverbar i origo och $f'(0) = 2$.

SVAR: a. Se läroboken. B $f'(0) = 2$

8. Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen $y''(t) + y'(t) = e^{-t}$ som också uppfyller att $y(0) = 0$. Avgör sedan också om någon av dessa lösningar uppfyller att $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

LÖSNING: Den allmänna lösningen till differentialekvationen har strukturen $y_h + y_p$ där y_h är allmänna lösningingen till motsvarande homogena ekvation och y_p är någon partikulärlösning.

För y_h observerar vi att den karaktäristiska ekvationen $r^2 + r = 0$ har lösningarna $r = 0$ och $r = -1$. Därför är $y_h(t) = C + De^{-t}$, där C och D är godtyckliga konstanter.

För y_p gör vi ansättningen $y_p(t) = ate^{-t}$ och försöker bestämma konstanten a så att vi får en partikulärlösning (obs att ansättningen $y_p = ae^{-t}$ inte fungerar eftersom e^{-t} är en homogen lösning). Med $y_p = ate^{-t}$ är $y_p' = ae^{-t} - ate^{-t}$ och $y_p'' = -2ae^{-t} + ate^{-t}$ och vi har att

$$y_p'' + y_p' = e^{-t} \iff -ae^{-t} = e^{-t} \iff a = -1.$$

Vi har alltså en partikulärlösning $y_p(t) = -te^{-t}$.

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är alltså $y(t) = C + De^{-t} - te^{-t}$.

Vi ser att $y(0) = 0 \Leftrightarrow C + D = 0 \Leftrightarrow D = -C$. De lösningar till differentialekvationen som uppfyller villkoret $y(0) = 0$ är alltså

$$y(t) = C - Ce^{-t} - te^{-t}.$$

För dessa funktioner gäller att $\lim_{t\to\infty} y(t) = C$ (där vi har använt standardgränsvärden) så enda chansen att få $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ är att välja $C = 0$.

SVAR: De lösningar till differentialekvationen som har värdet 0 i origo är $y(t) = C - Ce^{-t} - te^{-t}$, där C är en godtycklig konstant. Den enda av dessa funktioner som har gränsvärdet 0 i oändligheten är $y(t) = -te^{-t}$

9. Betrakta funktionen h definierad för alla x genom

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{om } x \neq 0 \\ 1 & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

a. Är h integrerbar på intervallet $[0, \pi]$? Motivera.

b. Beräkna approximativt integralen

$$\int_0^\pi h(x)\,dx$$

och bedöm hur bra approximationen är.

c. Skriv ett MATLAB-program som skattar integralen med ett absolut fel på högst 10^{-7}.

LÖSNING: a. Eftersom $\frac{\sin x}{x}$ är ett elementärt uttryck som är definierat för alla $x \neq 0$ så är h atutomatiskt kontinuerlig för alla $x \neq 0$. Eftersom dessutom $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = h(0)$ så är h kontinuerlig också i 0. Därför är h kontinurlig på hela det slutna begränsade intervallet $[0, \pi]$ och därmed också integrerbar där.

b. Med hjälp av Taylors formel får vi att

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

med ett fel som till beloppet är mindre än $x^9/9!$ för x mellan 0 och π.

Det betyder att

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}$$

med ett fel som till beloppet är mindre än $x^8/9!$ för x mellan 0 och π.

Därför får vi att

$$\int_0^\pi h(x)\,dx \approx \int_0^\pi (1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!})\,dx = [x-x^3/3{\cdot}3!+x^5/5{\cdot}5!-x^7/7{\cdot}7!]_0^\pi = \pi-\frac{\pi^3}{3\cdot 3!}+\frac{\pi^5}{5\cdot 5!}-\frac{\pi^7}{7\cdot 7!}.$$

Felet i denna approximation är till beloppet mindre än

$$\int_0^\pi \frac{x^8}{9!}\,dx = \frac{\pi^9}{9\cdot 9!} < \frac{4}{100}.$$

(OBS: Man måste inte använda Taylors formel utan det går också bra med t ex trapetsregeln.)

c.

Problemet uppstår i $x = 0$, för övrigt är integralen snäll. Om man gör

n=100;

x=[0:n]/n*pi;

y=sin(x)./x;

så blir y(1)=NaN, dvs Not A Number.

Alternativ 1:

Ett sätt är då att inte starta den numeriska integrationen förrän strax efter $x = 0$, och utnyttja att vi vet att funktionsvärdet fram till dess är nära 1. Integralen över detta första område är 1*bredden. Man bör prova att den valda brytpunkten, epps, inte påverkar svaret. (men skillnaden på f(epps) och 1 är mindre än $10^(- 15)$).

Eftersom vi gör ett litet fel i början kan det vara bra att ta i lite i toleransen till quad, så jag har sänkt till 1e-8 (så att summan av felen blir mindre än 1e-7.

epps=1e-8;

int1=1*epps;

int2=quad('funk',epps,pi,1e-8);

integral = int1 + int2

med funktionsfilen

```
function f=funk(x);
f=sin(x)./x;
```

Alternativ 2:

Ett annat sätt är att låta funktionsfilen själv kontrollera att den svarar rätt.

```
function f=funk(x);
epps=1e-8;
n=length(x);
f=0*x;
for i=1:n;
if abs(x(i))<epps
f(i)=1;
else
f(i)=sin(x)./x;
end;
end;
```

och huvudprogrammet

```
int=quad('funk',0,pi,1e-8)
```

(denna version tar längre tid eftersom vi får en loop inne i funktionen)

SVAR: $\int_0^\pi h(x)\,dx \approx \pi - \frac{\pi^3}{3\cdot 3!} + \frac{\pi^5}{5\cdot 5!} - \frac{\pi^7}{7\cdot 7!}$ med ett fel som till beloppet är mindre än $4/100$. För matlabprogrammet, se lösningen.