TENTAMEN 2
SF1664

Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder
för CFATE1 den 10 mars 2014 kl 08.00-13.00

Examinator: Lars Filipsson

Inga hjälpmedel tillåtna

Betygsskala A-F

Denna tentamen består av nio uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs förutom rätt svar också en väl skriven lösning där införda beteckningar förklaras och resonemangen som leder fram till svaret redovisas på ett tydligt och korrekt sätt. Man kan få max 4 poäng per uppgift. Maxpoäng alltså 36.

Betygsgränser:

FX: 15

E: 16

D: 18

C: 21

B: 24

A: 27

---

1. Bestäm värdemängden till funktionen

$$f(x) = 2 \arctan x + \ln(1 + x^2), \quad \text{där } -\sqrt{3} \leq x \leq 1.$$

För att ge full poäng skall svaret inte innehålla ”arctan” (men ”ln” går bra).

2. Beräkna integralen

$$\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx.$$

För att ge full poäng skall svaret inte innehålla namn på trigonometriska funktioner.

3. Beräkna två Riemannsummor R_1 och R_2 för integralen

$$\int_0^6 \frac{1}{x^3 + 1}\, dx,$$

båda med integrationsintervallet indelat i fyra lika långa delar och sådana att R_1 säkert är mindre och R_2 säkert är större än integralens värde. Svaret får ges som en summa av rationella tal (kvoter av heltal).

4. a. (2p) Hur många lösningar har ekvationen $x^3 - 3x = 3$?

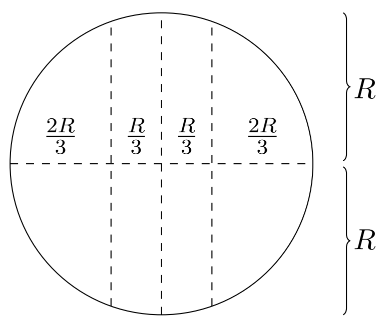
b. (2p) Bestäm ett närmevärde till varje lösning genom att först välja ett grovt (men inte för grovt) närmevärde x_0 och sedan göra en iteration med Newton-Raphsons metod (dvs approximera med en lämplig tangentlinje i x_0). *Tips: eftersom ni inte har miniräknare kan det vara lämpligt att välja det grova närmevärdet x_0 som ett heltal.*

5. Man vill approximera funktionen $f(x) = \sin 2x$ med Maclaurinpolynom.

a. (2p) Bestäm ett närmevärde till $f(0.1)$ med ett fel vars absolutbelopp är mindre än 0.01.

b. (2p) Finn ett polynom $p(x)$ som för alla x med $|x| \leq \frac{\pi}{8}$ uppfyller $|p(x) - f(x)| < 10^{-4}$.

6. Adam delar en klotformad apelsin med radien R i åtta delar genom att skära fyra snitt enligt figuren härintill. Är bitarna lika stora? Om inte, hur stora är (dvs vilken volym har) de största bitarna?



7. a. (2p) Definiera vad det innebär att funktionen $f(x)$ är deriverbar i $x = a$.

b. (2p) Verifiera att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3x^2 \sin(1/x) & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

är deriverbar för $x = 0$ och beräkna med hjälp av derivatans definition $f'(0)$.

8. Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen $y''(t) + y'(t) = e^{-t}$ som också uppfyller att $y(0) = 0$. Avgör sedan också om någon av dessa lösningar uppfyller att $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

9. Betrakta funktionen h definierad för alla x genom

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{om } x \neq 0 \\ 1 & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

a. Är h integrerbar på intervallet $[0, \pi]$? Motivera.

b. Beräkna approximativt integralen

$$\int_0^\pi h(x)\, dx$$

och bedöm hur bra approximationen är.

c. Skriv ett MATLAB-program som skattar integralen med ett absolut fel på högst 10^{-7}.