Kortfattat lösningsförslag till Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 2)
14 januari 2014 kl 8:00 - 13:00.

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonus från kontrollskrivningen gäller uppgift (1).
Preliminära betygsgränser: 14 poäng ger garanterat betyg E, 17 poäng ger garanterat betyg D, 21 poäng ger garanterat betyg C, 24 poäng ger garanterat betyg B och 28 poäng ger garanterat betyg A. Den som har 13 poäng får betyg Fx och har möjlighet att komplettera. Kontakta i så fall examinatorn.
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *BETA, Mathematics Handbook*.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar. Markera dina svar tydligt.

(1) a) Antag att f är 2π-periodisk och uppfyller

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t \le \pi \\ 0, & -\pi < t < 0. \end{cases}$$

Låt

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

vara Fourierserien till f. Skissa noggrant summan $S(t)$ på intervallet $[-3\pi, 3\pi]$, samt bestäm $S(0), S(\pi)$. (Observera att Fourierkoefficienterna ej behöver beräknas.) **(2p)**

b) Bestäm konstanterna a och b så att värdet av integralen

$$\int_{-1}^{1} |a + bx - x^3|^2 dx$$

blir så litet som möjligt. **(2p)**

Lösning: a) Använder vi sats 4.5 (sidan 88) får vi att $S(t) = f(t)$ för alla $t \neq (2k+1)\pi$, där k heltal (funktionen f gör "hopp"i punkterna $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$). För $t_0 = (2k+1)\pi$ har vi

$$S(t_0) = \frac{f(t_0+) + f(t_0-)}{2} = \frac{\pi^2 + 0}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

b) Vi betraktar rummet $C([-1, 1])$ med den inre produkten

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Vi noterar att $\psi_1(x) = 1$ och $\psi_2(x) = x$ är ortogonala (men ej ortonormala!). Låt $u(x) = x^3$. Vi vet från sats 5.3 (sidan 110) att integralen (som kan skrivas $\|a\varphi_1 + b\varphi_2 - u\|^2$) blir så liten som möjligt då $a\psi_1 + b\psi_2 = P(u) = \frac{<u,\psi_1>}{\|\psi_1\|^2}\psi_1 + \frac{<u,\psi_2>}{\|\psi_2\|^2}\psi_2$

där $P(u)$ är den ortogonal projektionen på delrummet som spänns upp av ψ_1 och ψ_2. Således ska vi välja

$$a = \frac{< u, \psi_1 >}{\|\psi_1\|^2} = 0$$

och

$$b = \frac{< u, \psi_2 >}{\|\psi_2\|^2} = \frac{3}{5}.$$

(2) Om vi vet att $a_0 = a_1 = 0$ och att

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

bestäm en formel för a_n, $n \geq 0$.

Lösning: Om vi $Z-$transformerar fås

$$z^2 A(z) - 5zA(z) + 6A(z) = \frac{2z}{z-1}$$

vilket ger, eftersom $z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$,

$$A(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Partialbråksuppdelning ger (det är ofta bra att spara ett z i täljaren; se exempel 3.26 på sidan 64)

$$\frac{2}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z-2} + \frac{1}{z-3}$$

vilket ger

$$A(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{2z}{z-2} + \frac{z}{z-3}.$$

Tabell (z10) ger nu

$$a_n = 1 - 2 \cdot 2^n + 3^n, n \geq 0.$$

(3) Bestäm en funktion f som uppfyller

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t)}{1+t^2} dt = \frac{5}{9+x^2}$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.

Lösning: Vi tolkar integralen som en faltning. Fouriertransform ger (använd F13 och F41)

$$F(\omega)\pi e^{-|\omega|} = \frac{5\pi}{3} e^{-3|\omega|}$$

vilket ger

$$F(\omega) = \frac{5}{3} e^{-2|\omega|} = \frac{10}{3\pi} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|}.$$

Tabell (F41) ger

$$f(x) = \frac{10}{3\pi} \cdot \frac{1}{x^2+4}.$$

(4) a) Låt H vara definierad genom

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Genom att tolka H som en (tempererad) distribution, använd definitionen för att beräkna derivatan H'. **(2p)**

b) Låt $f(x) = e^{-|x|}$. Bestäm f' och f'' i distributionsmening. Förenkla ditt svar så långt som möjligt. **(2p)**

Lösning: a) Se exempel 8.21 på sidan 208 (och exempel 8.12 på sidan 204).

b) Vi skriver f som $f(x) = e^{-x}H(x) + e^{x}(1 - H(x))$. Derivering ger

$$f'(x) = -e^{-x}H(x) + e^{-x}\delta(x) + e^{x}(1 - H(x)) - e^{x}\delta(x) = -e^{-x}H(x) + e^{x}(1 - H(x)).$$

och

$$f''(x) = e^{-x}H(x) - e^{-x}\delta(x) + e^{x}(1 - H(x)) - e^{x}\delta(x) = e^{-|x|} - 2\delta(x)$$

(se exempel 8.19 på sidan 207).

(5) Bestäm en lösning till problemet

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + u, & 0 < x < \pi,\ t > 0; \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0; \\ u(x,0) = \cos^2 x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Lösning: Vi fokuserar först på de två första villkoren. Sök lösning på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Insättning i den fösta ekvationen ger

$$X''(x)T(t) = X(x)(T'(t) + T(t))$$

som vi skriver

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = -\lambda.$$

Detta leder till de två ekvationerna

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T'(t) + (\lambda + 1)T(t) = 0.$$

Den andra av dessa ekvationer har den allmänna lösningen

$$T(t) = Ae^{-(\lambda+1)t}.$$

där A är en konstant. För att vi inte ska få den triviala lösningen leder randvillkoret $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, t > 0$ till randvärdesproblemet

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = X'(\pi) = 0.$$

Detta problem har icke-triviala lösningar precis då $\lambda = 0$ ($X_0(x) = 1$ är en lösning) eller $\lambda = n^2$ ($X_n(x) = \cos nx$ är en lösning), n positivt heltal (se sidan 140). Alltså,

$$u_0(x,t) = e^{-t}$$

och

$$u_n(x,t) = e^{-(n^2+1)t} \cos nx$$

är alla lösningar som uppfyller de två första villkoren. Eftersom dessa villkor är homogena så är även varje linjärkombination av $u_0, u_1, u_2, \ldots$ också en lösning.

Vi fokuserar nu på det tredje villkoret, dvs $u(x,0) = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Notera att vi har $u_0(x,0) = 1$ och $u_2(x,0) = \cos 2x$. Således uppfyller funktionen

$$u(x,t) = \frac{1}{2}u_0(x,t) + \frac{1}{2}u_2(x,t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-5t}\cos 2x$$

alla de tre villkoren, dvs det är en lösning till problemet.

(6) Antag att funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[-1,1]$ och uppfyller

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^n dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Vad kan man säga om f? Bevisa ditt påstående noggrant.

Lösning. Notera att antagandena på f medför att

$$\int_{-1}^{1} f(x)P(x)dx = 0$$

för varje polynom $P(x)$.

Vi betraktar rummet $C([-1,1])$ (rummet av kontinuerliga funktioner på $[-1,1]$) med den inre produkten

$$< g, h >= \int_{-1}^{1} g(x)\overline{h(x)}dx.$$

Vi vet att Legendrepolynomen $P_0, P_1, \ldots$ utgör ett fullständigt ortogonalt system i $C([-1,1])$ (se sidan 124-125). Låt $\varphi_j(x) = P_j(x)/\|P_j\|$ för $j = 0, 1, 2, \ldots$. Då är $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ ett fullständigt ON-system i $C([-1,1])$. Använder vi nu Parsevals formel (se Sats 5.4, sid 112), tillsammans med det faktum att varje φ_j är ett polynom samt antagandena om f, får vi

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} | < f, \varphi_j > |^2 = 0,$$

eftersom varje Fourierkoefficient $< f, \varphi_j >= 0$. Således har vi

$$0 = \|f\|^2 =< f, f >= \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx.$$

Eftersom f är kontinuerlig så medför detta att f måste vara identiskt noll.

(7) Bestäm alla funktioner $f \in C^4(\mathbb{T})$ (dvs f är 2π-periodisk och $f, f', f'', f^{(3)}, f^{(4)}$ är kontinuerliga) som uppfyller

$$f''(t) + 5f(t) = f(t - \pi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösning: (Jämför med exempel 4.4 på sidan 85.) Varje $f \in C^4(\mathbb{T})$ kan skrivas på formen

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

och vi kan derivera termvis två gånger:

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{int}$$

$$f''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n^2) c_n e^{int}$$

(se sats 4.2, sid 83, och sats 4.4, sid 85). Insättning i ekvationen leder till

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(-n^2 + 5 - e^{-in\pi})e^{int}.$$

För att detta ska vara uppfyllt för alla t så måste samtliga koefficienter vara noll, dvs vi måste ha

$$c_n(-n^2 + 5 - e^{-in\pi}) = 0 \text{ för alla } n \in \mathbb{Z}.$$

Eftersom $e^{-in\pi} = (-1)^n$ så ser vi att $-n^2 + 5 - e^{-in\pi} = 0$ precis för $n = \pm 2$. Således måste Fourierkoefficienterna c_n uppfylla

$$c_n = 0 \text{ för alla } n \neq \pm 2$$

och c_2 och c_{-2} kan vara vad som helst. Alltså, vi får

$$f(t) = Ae^{-2it} + Be^{2it}$$

där A, B är godtyckliga komplexa tal.

(8) Denna uppgift handlar om Riemann-Lebesgues lemma.
a) Antag att f och f' är kontinuerliga på $[0, 1]$. Visa att **(1p)**

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^1 f(t) \sin \lambda t dt = 0.$$

b) Antag att f är kontinuerlig på $[0, 1]$. Visa att

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^1 f(t) \sin \lambda t dt = 0.$$

(Tips: eftersom f är kontinuerlig så är f Riemannintegrerbar.) **(3p)**

Lösning: a) Eftersom f och f' är kontinuerliga på $[0,1]$ finns det en konstant M sådan att $|f(x)|, |f'(x)| < M$ för alla $x \in [0,1]$. Partiell integration ger

$$\left|\int_0^1 f(t)\sin\lambda t dt\right| = \left|\left[-\frac{f(t)\cos\lambda t}{\lambda}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{f'(t)\cos\lambda t}{\lambda} dt\right| \leq \frac{3M}{\lambda} \to 0 \text{ då } \lambda \to \infty.$$

b) Se bevis av Sats 2.2 på sidan 25.