

# REGLERTEKNIK, KTH

## REGLERTEKNIK AK EL1000, EL1110 och EL1120

Tentamen 2014-01-10, kl 14:00 – 19:00

**Hjälpmedel:** Kursboken i Reglerteknik AK  
(Glad, Ljung: Reglerteknik eller motsvarande),  
räknetabeller, formelsamlingar och räknedosor.  
Observera att övningsmaterial (övningsuppgifter, ex-tentor  
och lösningar) INTE är tillåtna hjälpmedel.

**Observandum:** Behandla inte mer än en uppgift per blad.  
Varje steg i lösningen skall motiveras.  
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.  
Skriv svar (med enhet i förekommande fall).  
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.  
Skriv endast på en sida per ark.  
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Tentamen består av fem uppgifter, som vardera bedöms med 10 poäng.  
Poängsättningen för deluppgifter har markerats.

**Betygsgränser:** betyg Fx:  $\geq 21$   
betyg E:  $\geq 23$   
betyg D:  $\geq 28$   
betyg C:  $\geq 33$   
betyg B:  $\geq 38$   
betyg A:  $\geq 43$

**Ansvarig:** Henrik Sandberg 08 790 72 94

**Resultat:** Finns på Studerande-expeditionen (STEX) senast 2014-01-31.

**Utlämning:** Tentamen kan hämtas ut vid Studerande-expeditionen (STEX), plan 3,  
Osquidas väg 10.

*Lycka till!*

1. (a) Låt  $u(t) = 10 \sin(2\pi t)$ ,  $t \geq 0$ , vara insignal till ett system med överföringsfunktion

$$G(s) = s$$

Antag att initialvärden är noll och beräkna motsvarande utsignal  $y(t)$  för  $t \geq 0$ . (2p)

- (b) Ett instabilt system med överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1-\epsilon s)}, \quad \epsilon \geq 0,$$

återkopplas med P-regulern  $F(s) = 1$ . Ange för vilka värden på  $\epsilon \geq 0$  som motsvarande återkopplade system är stabilt. (2p)

- (c) PI-regulatorn

$$u(t) = K[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau].$$

approximeras med Euler bakåt. Svaret blir

$$u(t) = u(t-T) + 10.2e(t) - 10e(t-T).$$

Vad är möjliga värden på  $K$ ,  $T_I$  och  $T$ ? (3p)

- (d) Linjärisera det skalära systemet ( $\dim\{x(t)\} = 1$ )

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [x(t) + u(t)]^2 \\ y(t) &= x^2(t) \end{aligned}$$

runt stationär punkt för  $u(t) = 1$ . (3p)

2. (a) Studera ett dynamiskt system som kan beskrivas av

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)},$$

och som regleras med hjälp av PI-regulatorn

$$F(s) = K_P + \frac{K_I}{s}.$$

i. Antag  $K_I = 0$ . Rita rotort med avseende på  $K_P$  för det slutna systemets pol och avgör för vilka värden på  $K_P > 0$  som det återkopplade systemet är stabilt. (2p)

ii. Välj  $K_I$  så att

$$\frac{K_I}{K_P} = \alpha > 0$$

Rita rotort med avseende på  $K_P$  för det slutna systemets poler och avgör för vilka värden på  $K_P > 0$  som det återkopplade systemet är stabilt. (4p)

(b) Studera återkoppling av ett system med öppen överföringsfunktion  $G(s)$ , och antag att motsvarande komplementära känslighetsfunktion ges av

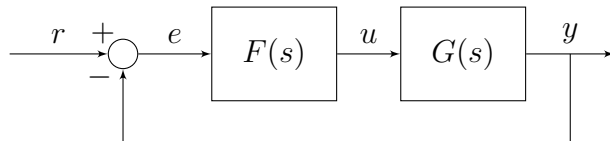
$$T(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Antag nu att verkliga öppna systemet ges av

$$G^o(s) = G(s)[1 + \epsilon s],$$

Antag att förutsättningarna för Robusthetskriteriet (Resultat 6.2 på sidan 125 i kursboken) är uppfyllda. Avgör med hjälp av Robusthetskriteriet för vilka värden på  $\epsilon$  man kan garantera att det verkliga slutna system är stabilt. (4p)

3. Studera det återkopplade systemet i Figur 1.



Figur 1: Blockdiagram för det återkopplade systemet.

Bodediagramet för  $G_o(s) = F(s)G(s)$ , när  $F(s) = 0.16$  finns i Figur 2 och 3.

(a) Konstruera en ny regulator  $F(s)$  som uppfyller följande krav:

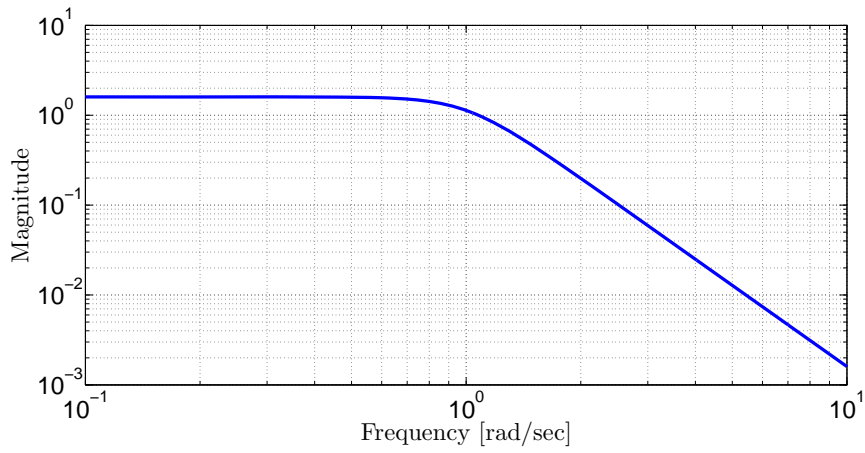
- i. Slutna systemet skall vara dubbelt så snabbt som för  $F(s) = 0.16$ .
- ii. Fasmarginalen skall vara lika stor som för  $F(s) = 0.16$ .
- iii. Statiska felet vid ett enhetssteg i  $r$  måste vara mindre än 0.05 utan att lågfrekvensförstärkningen är onödigt stor.

(8p)

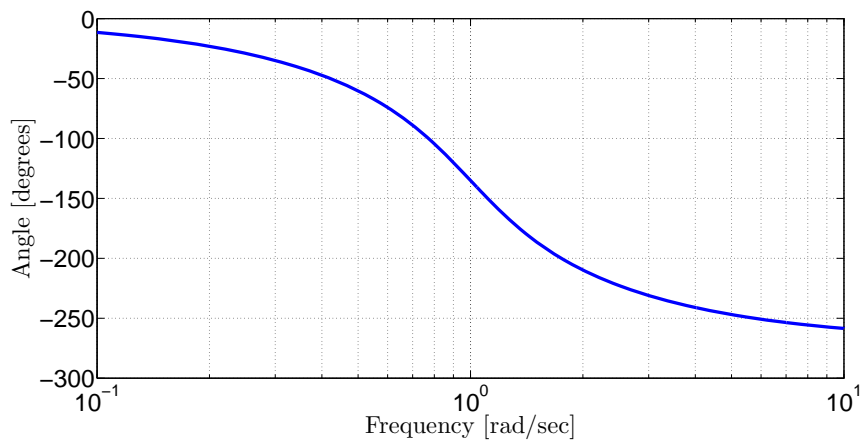
(b) Antag att det verkliga systemet dessutom innehåller en tidsfördröjning

$$G^o(s) = G(s) e^{-sT}, \quad T > 0.$$

Hur stor kan tidsfördröjningen  $T$  vara innan det återkopplade systemet med regulator framräknad i Uppgift a) blir instabilt? (2p)



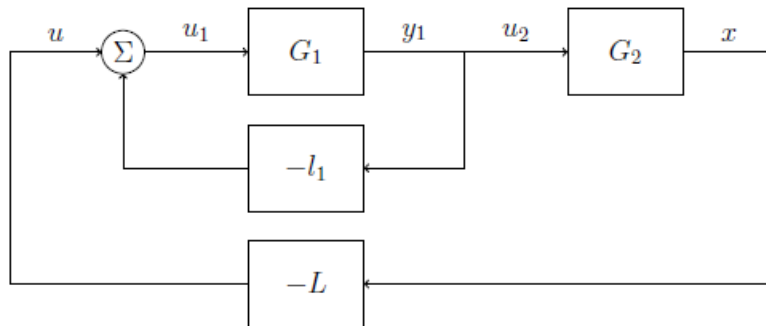
Figur 2: Amplitud-Bodediagram för  $F(s)G(s)$



Figur 3: Fas-Bodediagram för  $F(s)G(s)$

4. Systemet i Figur 4 kan ses som två kaskadkopplade system, där det första systemet har  $u_1$  som insignal och  $y_1$  som utsignal och det andra systemet har  $u_2 = y_1$  som insignal och de interna mätbara tillstånden

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$



Figur 4: Kaskadkopplade system

Överföringsfunktionen för första systemet ges av

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1},$$

och en tillståndmodell för det andra systemet ges av

$$A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Inför tillståndet  $x_1(t) = y_1(t)$  och ange motsvarande tillståndsmodell för  $G_1(s)$ . (1p)

- (b) Ett vanligt sätt att konstruera en regulator för två kaskadkopplade system är att först konstruera en snabb inre reglering. Bestäm en tillståndsåterkoppling

$$u_1(t) = -l_1 x_1(t) + u(t)$$

så att det inre slutna systemets pol hamnar i  $-20$ . (2p)

- (c) Approximera det slutna inre systemet med dess statiska förstärkning, det vill säga

$$u_2(t) = G_{cl}^1(0)u(t)$$

där  $G_{cl}^1(s)$  är den återkopplade överföringsfunktionen från  $u(t)$  till  $y_1(t)$  med återkopplingen beräknad i Uppgift b), se Figur 4.

Bestäm sedan en tillståndsåterkoppling

$$u(t) = -Lx(t) = - \begin{bmatrix} l_2 & l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

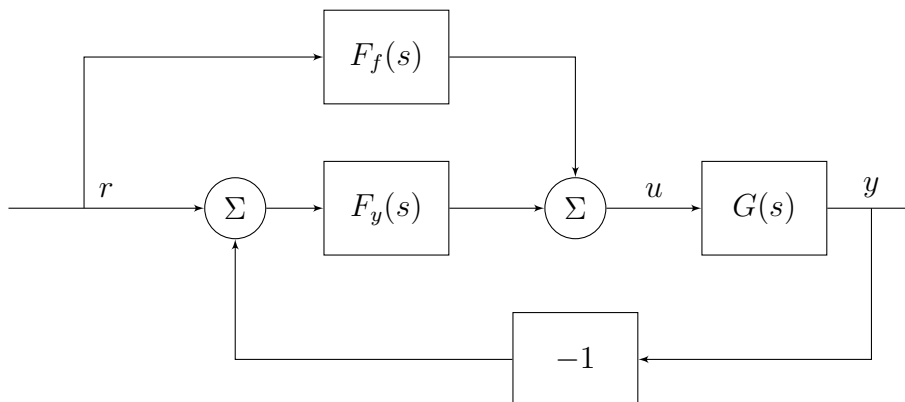
så det återkopplade systemets poler hamnar i  $\{-4, -5\}$ . (3p)

- (d) Vad blir polerna för hela det slutna systemet (utan att approximera det första inre systemet) om

$$u_1(t) = - \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

där  $l_1$  är beräknad i Uppgift b), och där  $l_2$  och  $l_3$  är beräknade i Uppgift c)? (4p)

5. Ett sätt att snabba upp inverkan av ändring av referenssignal är att göra en framkoppling från referenssignalen. Figur 5 visar motsvarande blockdiagram.



Figur 5: Blockdiagram Uppgift 5.

- (a) Beräkna överföringsfunktionen från referenssignal  $r$  till reglerfelet  $r - y$  för systemet i Figur 5. (2p)
- (b) Visa att om

$$F_f(s) = \frac{1}{G(s)}$$

så elimineras inverkan av referenssignalen i reglerfelet helt. (1p)

Det finns minst två problem med denna framkoppling. Dels så kan  $F_f(s)$  innehålla rena deriveringar och dels kan man få problem med instabilitet om man förkortar instabila poler eller nollställen.

- (c) Föreslå hur man kan modifiera  $F_f(s)$  så att rena deriveringar inte skapar praktiska problem. (1p)



(d) Vi skall nu studera problemet med instabila nollställen. Antag att

$$G(s) = \frac{1 - s}{(1 + 2s)(1 + 10s)}$$

och välj

$$F_f(s) = (1 + s)(1 + 2s)(1 + 10s)$$

Vi har introducerat ett stabilt nollställe i  $F_f(s)$  som är speglingen av det instabila nollstället i imaginära axeln.

Denna inställning kallas en "Zero Phase Error Tracking Controller".

(i) Visa att för ovanstående exempel gäller

$$\arg\{F_f(i\omega)G(i\omega)\} = 0$$

för alla frekvenser  $\omega$ , dvs vi har inget fäfel jämfört med den önskade relationen

$$F_f(s)G(s) = 1 \tag{3p}$$

(ii) Bestäm för ovanstående exempel, för vilka frekvenser

$$1/\sqrt{2} \leq |F_f(i\omega)G(i\omega)| \leq 2 - 1/\sqrt{2}$$

dvs då felets förstärkning är relativt litet. (3p)