LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMEN 2 SF1664

Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder
för CFATE1 den 11 januari 2014 kl 09.00-14.00

1. Hur många gånger antar funktionen

$$f(x) = (12 - x)\sqrt{x}$$

värdet 13 när x varierar i intervallet $1 \leq x \leq 9$?

LÖSNING: Vi ser att f är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet och att $f(1) = 11$ och $f(9) = 9$. Vi deriverar och får

$$f'(x) = -\sqrt{x} + \frac{12 - x}{2\sqrt{x}} = \frac{12 - 3x}{2\sqrt{x}}$$

som existerar för alla x i intervallet. Det gäller att $f'(x) = 0$ om och endast om $x = 4$. Ett teckenstudium av derivatan ger att

då $1 < x < 4$ är $f'(x) > 0$ och det följer att f är strängt växande här,

då $4 < x < 9$ är $f'(x) < 0$ och det följer att f är strängt avtagande här.

Det följer av ovanstående att $f(x)$ först växer strikt från $f(1) = 11$ till $f(4) = 16$, som är funktionens största värde, och därefter avtar $f(x)$ strikt ner till $f(9) = 9$. Alltså måste värdet 13 antas exakt två gånger.

SVar: Två gånger.

2. Beräkna integralen

$$\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x}\, dx.$$

LÖSNING: Med hjälp av substitutionen $1+\ln x = u$, som ger $dx/x = du$ och nya gränser 1 resp 2, får vi

$$\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx = \int_1^2 \sqrt{u}\,du = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}.$$

Svar: $(4\sqrt{2}-2)/3$

3. En mjölkförpackning med temperaturen 4° C tas ur kylskåpet och placeras i ett rum med konstant temperatur 20° C. Efter 12 minuter har mjölken antagit temperaturen 12° C. Efter hur lång tid ytterligare har mjölkens temperatur nått 18° C? (Förutsätt att förloppet följer Newtons avkylningslag, dvs att mjölkens temperaturändring per tidsenhet är proportionell mot temperaturskillnaden mellan rummet och mjölken.)

LÖSNING: Låt $y(t)$ betyda mjölkens temperatur t minuter efter uttagandet ur kylskåpet. Newtons avkylningslag ger att $y'(t) = k(20 - y(t))$ för någon konstant k. Dessutom ska villkoret $y(0) = 4$ uppfyllas.

Vi löser diffekvationen $y'(t) = k(20 - y(t))$, som också kan skrivas
$y'(t) + ky(t) = k20$

Först söks y_h, dvs allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y' + ky = 0$. Den karaktäristiska ekvationen $r + k = 0$ har lösning $r = -k$ varför $y_h(t) = Ce^{-kt}$.

Sedan söks y_p, dvs någon partikulärlösning. Vi ser att vi kan ta $y_p(t) = 20$.

Vi konstaterar att differentialekvationens allmänna lösning är $y(t) = 20 + Ce^{-kt}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 4$ ger oss att $C = -16$, så den funktion som löser differentialekvationen med det givna begynnelsevillkoret är alltså $y(t) = 20 - 16e^{-kt}$.

Vi kan nu bestämma konstanten k med hjälp av temperaturen efter 12 minuter som ju var given: 12° C. Vi ska alltså ha att $y(12) = 12$ vilket är detsamma som att $20 - 16e^{-12k} = 12$. Vi får $k = \frac{\ln 2}{12}$.

Den funktion som beskriver mjölkens temperatur vid tiden t minuter efter uttagandet är alltså

$$y(t) = 20 - 16e^{-(t\ln 2)/12}.$$

Mjölkens temperatur är 18° när $y(t) = 18$, dvs när $20 - 16e^{-(t\ln 2)/12} = 18$. Löser vi för t får vi tidpunkten $t = (12\ln 8)/\ln 2 = 36$ minuter.

Svar: Mjölkens temperatur når 18° C precis 36 minuter efter uttagandet ur kylskåpet.

4. Ge exempel på följande (endast svar krävs på denna uppgift):

a. En funktion f som är kontinuerlig men inte deriverbar i punkten $x = 3$.

b. En funktion g som har definitionsmängd $\mathbf{R}$ och värdemängd $\mathbf{R}$ och som är inverterbar.

c. En funktion h som har definitionsmängd $\mathbf{R}$ och värdemängd $[0, \infty[$ och som inte är inverterbar.

Svar: a. Till exempel $f(x) = |x - 3]$.

b. Till exempel $g(x) = x$.

c. Till exempel $h(x) = x^2$

5. Använd ett lämpligt valt Taylorpolynom för att bestämma ett närmevärde till $\ln 1.1$ med ett fel som till absolutbeloppet är mindre än 0.001.

LÖSNING: Vi vet att för x nära 0 är $\ln(1 + x) \approx x - \dfrac{x^2}{2}$ med ett fel som ges av $R(x) = \dfrac{x^3}{3(1+c)^3}$, för något c mellan 0 och x. (Detta är en standardutveckling; man kan förstås lika gärna räkna fram det lämpliga Taylorpolynomet från scratch och man måste inte heller ta ovanstående Maclaurinpolynom till $\ln(1 + x)$ utan man kan lika gärna välja Taylorpolynomet till $\ln x$ kring punkten 1 om man hellre vill det).

Med hjälp av polynomet får vi att

$$\ln 1.1 = \ln(1 + 0.1) \approx 0.1 - \frac{0.01}{2} = 0.095.$$

Felet i denna approximation är (för något c mellan 0 och 0.1)

$$R(0.1) = \frac{0.1^3}{3(1+c)^3} \leq \frac{0.001}{3} < 0.001$$

Svar: $\ln 1.1 \approx 0.095$

6. Betrakta initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = x^2 - (y(x))^2 \\ y(2) = 3, \ y'(2) = 5 \end{cases}$$

a. Skatta $y(2.4)$ med hjälp av Eulers metod och steglängden 0.2.

b. Skatta $y'(2.4)$ med hjälp av Eulers metod och steglängden 0.2.

c. Skriv ett matlabprogram som plottar funktionsgrafen till funktionen $w(x)$ som definieras genom $w(x) = y(x) - y'(x)$ på intervallet $2 \leq x \leq 10$.

LÖSNING:

a+b

Eulers metod klarar bara första ordningens differentialekvationer. Vår differentialekvation är av andra ordningen (y''). Vi måste därför skriva om den till ett system av första ordningens differentialekvationer.

En andra ordningens differentialekvation innebär två stycken första ordningens differentialekvation. Vi inför därför två hjälpvariabler. Vi kallar dem $u1$ och $u2$. Vi måste nu ge uttryck för dessa förstaderivator utan att använda några derivator.

Vi sätter $u1 = y$ vilket ger $u1' = y'$ men skrivs som $u1' = u2$.

Vi sätter $u2 = y'$ vlket ger $u2' = y'' = x^2 - y^2 - y'$ vilket vi skriver som $u2' = x^2 - u1^2 - u2$.

I vektorform blir det då

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \bar{u}' = \begin{pmatrix} u2 \\ x^2 - u1^2 - u2 \end{pmatrix}$$

Eulers metod säger att $y(x+h)$ skall skattas med $y(x) + h * f(x, y)$ där $f(x, y) = y'(x)$ (och vi har nu u i stället för y).

Från $x = 2$ till $x = 2.4$ med steget 0.2 innebär 2 steg (och $h = 0.2$).

Startvärdena för x är 2 dvs $x_0 = 2$. Startvärdet för $u1$ är $u1_0 = y(2) = 3$. Startvärdet för $u2$ är $u2_0 = y'(2) = 5$.

Vi får

$$\bar{u}'_0 = \begin{pmatrix} u2_0 \\ x_0^2 - u1_0^2 - u2_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2^2 - 3^2 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

och nya u-vektorn

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_0 + h \cdot \bar{u}'_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + 0.2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dvs $u1_1 = 4$ och $u2_1 = 3$ och $x_1 = x_0 + h = 2 + 0.2 = 2.2$. I nästa steg blir då derivatorna

$$\bar{u}'_1 = \begin{pmatrix} u2_1 \\ x_1^2 - u1_1^2 - u2_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2.2^2 - 4^2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -14.16 \end{pmatrix}$$

och nya u-vektorn

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_1 + h \cdot \bar{u}_1' = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 0.2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -14.16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.6 \\ 0.168 \end{pmatrix}$$

dvs $u1_2 = 4.6$ och $u2_2 = 0.168$ och $x_2 = x_1 + h = 2 + 0.2 = 2.2$.

Alltså skattar vi $y(2.4)$ till 4.6 och $y'(2.4)$ till 0.168

c

I Matlab är det lättast att använda ode45 till detta. Då behöver man lägga derivataberäkningarna i en funktionsfil.

```
function uprim=dudx(x,u);

uprim = [u(2); x*x-u(1)*u(1)-u(2)];
```

Och då blir programmet

```
[xut, uut] = ode45('dudx',[2 10],[3 5]); % funktion, intervall & startvärden

y = uut(:,1);

yprim = uut(:,2);

w = y-yprim;

plot(xut,w)
```

7. Beräkna, exakt eller approximativt, integralen

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx.$$

LÖSNING: Eftersom det verkar svårt att hitta en primitiv funktion använder vi trapetsregeln. Med steglängd $\pi/4$ får vi:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx \approx \frac{\pi}{4} \left(\frac{0}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5\pi}{4}} + \frac{1}{\frac{6\pi}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7\pi}{4}} + \frac{0}{2} \right) = \frac{71}{210}$$

Svar: Integralens värde är ungefär 71/210 (≈ 0.338)

8. Låt $f(x) = x^4 + x^2 + x$. Hur många nollställen har derivatan $f'(x)$? Beräkna, exakt eller approximativt, en lösning x till $f'(x) = 0$. Skissa kurvan $y = f(x)$.

LÖSNING: Vi ser att f är ett polynom så f är deriverbar överallt hur många gånger som helst. Vi deriverar och får $f'(x) = 4x^3 + 2x + 1$. Frågan är nu hur många nollställen detta har. Vi deriverar igen och får $f''(x) = 12x^2 + 2$ vilket är positivt för alla x. Eftersom $f''(x) > 0$ för alla x så är $f'(x)$ strängt växande och kan därför ha högst ett nollställe. Men eftersom $f'(-1) = -5$ och $f'(0) = 1$ så följer av satsen om mellanliggande värden (då f' är kontinuerlig) att det finns ett nollställe till derivatan någonstans i intervallet mellan -1 och 0. För att approximera detta nollställe använder vi Newton-Raphsons metod med start i $x_0 = 0$. Eftersom $f'(0) = 1$ och $f''(0) = 2$ får vi som första approximation av nollstället

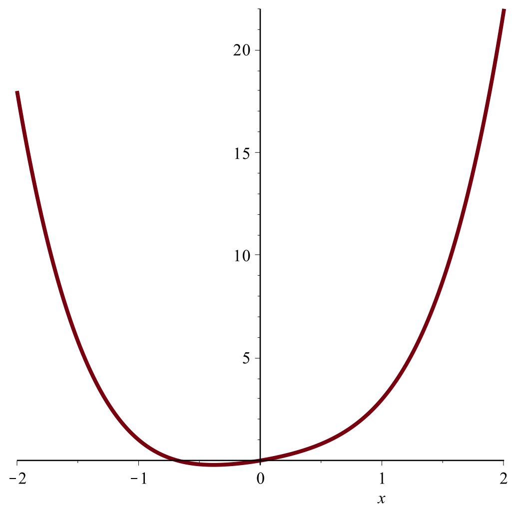
$$x_1 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

För att få bättre noggrannhet gör vi en iteration till. Eftersom $f'(-1/2) = -1/2$ och $f''(-1/2) = 5$ får vi som andra approximation av nollstället

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{-1/2}{5} = -0.4.$$

Vi har alltså att $f'(x) = 0 \iff x = x^* \approx -0.4$. För $x < x^*$ är $f'(x) < 0$ så f är strängt avtagande här. För $x > x^*$ är $f'(x) > 0$ så f är strängt växande här. Det följer att f har en lokal och global minpunkt i $x = x^*$ och det är lätt att se att funktionsvärdet i denna punkt är negativt, ungefär -0.2. Vi observerar också att $f(0) = 0$ och att $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. Nu kan vi skissa kurvan, se svaret nedan.

Svar: Derivatan har exakt ett nollställe x^* och $x^* \approx -0.4$. Kurvskiss:



9. Formulera och bevisa *analysens huvudsats*, som relaterar begreppen derivata och integral. Använd sedan huvudsatsen för att också bevisa *insättningsformeln*, som säger hur man kan beräkna integraler med hjälp av primitiva funktioner.

LÖSNING: Se läroboken.