

# TENTAMEN 2

## SF1664

Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder  
för CFATE1 den 11 januari 2014 kl 09.00-14.00

---

Examinator: Lars Filipsson

Inga hjälpmedel tillåtna

Betygsskala A-F

Denna tentamen består av nio uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs förutom rätt svar också en väl skriven lösning där införda beteckningar förklaras och resonemangen som leder fram till svaret redovisas på ett tydligt och korrekt sätt. Man kan få max 4 poäng per uppgift. Maxpoäng alltså 36.

Betygsgränser:

FX: 15

E: 16

D: 18

C: 21

B: 24

A: 27

---

1. Hur många gånger antar funktionen

$$f(x) = (12 - x)\sqrt{x}$$

värdet 13 när  $x$  varierar i intervallet  $1 \leq x \leq 9$ ?

2. Beräkna integralen

$$\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx.$$

3. En mjölkförpackning med temperaturen  $4^\circ \text{C}$  tas ur kylskåpet och placeras i ett rum med konstant temperatur  $20^\circ \text{C}$ . Efter 12 minuter har mjölken antagit temperaturen  $12^\circ \text{C}$ . Efter hur lång tid ytterligare har mjölkens temperatur nått  $18^\circ \text{C}$ ? (Förutsätt att förloppet följer Newtons avkylningslag, dvs att mjölkens temperaturändring per tidsenhet är proportionell mot temperaturskillnaden mellan rummet och mjölken.)

4. Ge exempel på följande:

- En funktion  $f$  som är kontinuerlig men inte deriverbar i punkten  $x = 3$ .
- En funktion  $g$  som har definitionsmängd  $\mathbf{R}$  och värdemängd  $\mathbf{R}$  och som är inverterbar.
- En funktion  $h$  som har definitionsmängd  $\mathbf{R}$  och värdemängd  $[0, \infty[$  och som inte är inverterbar.

5. Använd ett lämpligt valt Taylorpolynom för att bestämma ett närmevärde till  $\ln 1.1$  med ett fel som till absolutbeloppet är mindre än 0.001.

6. Betrakta initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = x^2 - (y(x))^2 \\ y(2) = 3, y'(2) = 5 \end{cases}$$

- Skatta  $y(2.4)$  med hjälp av Eulers metod och steglängden 0.2.
- Skatta  $y'(2.4)$  med hjälp av Eulers metod och steglängden 0.2.
- Skriv ett matlabprogram som plottar funktionsgrafen till funktionen  $w(x)$  som definieras genom  $w(x) = y(x) - y'(x)$  på intervallet  $2 \leq x \leq 10$ .

7. Beräkna, exakt eller approximativt, integralen

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

8. Låt  $f(x) = x^4 + x^2 + x$ . Hur många nollställen har derivatan  $f'(x)$ ? Beräkna, exakt eller approximativt, en lösning  $x$  till  $f'(x) = 0$ . Skissa kurvan  $y = f(x)$ .

9. Formulera och bevisa *analysens huvudsats*, som relaterar begreppen derivata och integral. Använd sedan huvudsatsen för att också bevisa *insättningsformeln*, som säger hur man kan beräkna integraler med hjälp av primitiva funktioner.