Kortfattat lösningsförslag till Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 1) 7 januari 2014 kl 8:00 - 13:00.

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonus från kontrollskrivningen gäller uppgift (1).
Preliminära betygsgränser: 14 poäng ger garanterat betyg E, 17 poäng ger garanterat betyg D, 21 poäng ger garanterat betyg C, 24 poäng ger garanterat betyg B och 28 poäng ger garanterat betyg A. Den som har 13 poäng får betyg Fx och har möjlighet att komplettera. Kontakta i så fall examinatorn.
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *BETA, Mathematics Handbook*.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar. Markera dina svar tydligt.

(1) Man kan lätt verifiera att $y_1 = e^t$ är en lösning till differentialekvationen

$$ty'' - (2t+1)y' + (t+1)y = 0, \quad t > 0.$$

Bestäm den lösning y till ekvationen som uppfyller begynnelsevillkoren $y(1) = 1, y'(1) = 4$.

Lösning: Vi behöver en fundamental lösningsmängd. Vi söker ytterliggare en lösning y_2 på formen $y_2(t) = v(t)e^t$. Insättning i ekvationen, samt förenkling, leder till

$$tv'' - v' = 0.$$

Genom att låta $u = v'$, och dividera med t, får vi

$$u' - \frac{1}{t}u = 0.$$

Multiplicerar vi ekvationen med den integrerande faktorn $e^{-\int(1/t)dt} = 1/t$ får vi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}u\right) = 0$$

vilket ger oss $u(t) = ct$ där c är en konstant. Således får vi $v(t) = a_1t^2 + a_2$, där a_1, a_2 är konstanter. Speciellt är alltså $y_2(t) = t^2e^t$ en lösning till ekvationen.

Eftersom y_1 och y_2 bildar en fundamental lösningsmängs (verifiera, t ex, att Wronskideterminanten $W[y_1, y_2](t) \neq 0$) så vet vi att den allmänna lösningen till ekvationen ges av

$$y(t) = c_1e^t + c_2t^2e^t.$$

Begynnelsevillkoren ger nu att vi måste ha $c_1 = -(1/2)e^{-1}$ och $c_2 = (3/2)e^{-1}$, dvs vi får lösningen

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{t-1} + \frac{3}{2}t^2e^{t-1}.$$

(2) Betrakta differentialekvationen

$$y' = y(1-y).$$

a) Bestäm de kritiska punkterna till ekvationen samt avgör om de är stabila eller instabila. **(1p)**
b) Låt $y_1(t)$ vara lösningen till ekvationen som uppfyller begynnelsevillkoret $y_1(0) = 1/3$. Skissa grafen $y = y_1(t), t \in \mathbb{R}$. **(1p)**
c) Visa, genom att lösa ekvationen, att om $y_2(t)$ är lösningen som uppfyller $y_2(0) = 2$ så finns det ett $t_0 < 0$ sådant att $\lim_{t \to t_0+} y_2(t) = \infty$. Bestäm t_0 samt skissa grafen $y = y_2(t)$, $t \in (t_0, \infty)$. **(2p)**

Lösning: Notera att vi har den logistiska ekvationen (avsnitt 2.5 i Boyce-DePrima)
a) De kritiska punkterna är $y = 0$ (instabil) och $y = 1$ (stabil). Se sidan 81 i B-DP.
b) Se, t ex, figur 2.5.3 på sidan 81.
c) Genom att lösa ekvationen, som är separabel, får man (om $y \neq 0, 1$) att

$$y(t) = \frac{y_0}{y_0 + (1-y_0)e^{-t}}$$

är lösningen som uppfyler $y(0) = y_0$ (se formel (11) på sidan 83). Vi har $y_0 = 2$, dvs vi får

$$y_2(t) = \frac{2}{2 - e^{-t}}.$$

Vi noterar att nämnaren är noll precis då $e^{-t} = 2$, dvs då $t = -\ln 2$. Alltså, lösningen existerar på intervallet (t_0, ∞), där $t_0 = -\ln 2$. Notera också att vi har $\lim_{t \to t_0+} y_2(t) = \infty$. För figur, se fig. 2.5.3 på sidan 81.

(3) Betrakta det autonoma systemet

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = -3x + 2y$$

Det är lätt att se att origo är den enda kritiska punkten.
a) Rita ett fasporträtt. Motivera din figur. **(1p)**
b) Bestäm den lösning $(x(t), y(t))$ till systemet som uppfyller $x(0) = 5, y(0) = -1$. **(2p)**
c) För vilka begynnelsevillkor (x_0, y_0) gäller det att lösningen $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ som uppfyller $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ också uppfyller $\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$? **(1p)**

Lösning: Matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

har egenvärdena $r_1 = -1$ och $r_2 = 5$, med motsvarande egenvektorer $v_1 = \binom{1}{1}, v_2 = \binom{1}{-1}$. Således vet vi att den allmänna lösningen till systemet ges av

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

a) Eftersom egenvektorerna har olika tecken har vi att den kritiska punkten $(0, 0)$ är en sadelpunkt. Använd egenvektorerna, eller lösningen ovan, för att rita ett fasporträtt. Se sidan 498 i B-DP.

b) Begynnelsevillkoret ger att $c_1 = 2$ och $c_2 = 3$, dvs vi får lösningen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

c) En lösning $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ uppfyller $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ precis då $c_2 = 0$ (eftersom $e^{-t} \to 0$ och $e^{5t} \to \infty$ då $t \to \infty$). Detta sker precis då (x_0, y_0) är på formen

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

(4) Använd Laplacetransform för att lösa integralekvationen

$$e^{-t} = y(t) + \int_0^t (t-u)y(u)du.$$

Lösning: Laplacetransformering ger (notera att vi har en faltning i högerledet)

$$\frac{1}{s+1} = Y(s) + \frac{1}{s^2}Y(s)$$

vilket ger

$$Y(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)}.$$

Beta (L 38) ger nu

$$y(t) = \frac{e^{-t} + \cos t + \sin t}{2}.$$

(5) Begynnelsevärdesproblemet

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0,$$

har en potensserielösning

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

a) Bestäm denna serie. **(3p)**

b) Bestäm ett tal $\rho > 0$ sådant att serien säkert konvergerar för alla $|x| < \rho$. Motivera ditt svar. **(1p)**

Lösning: a) Insättning i ekvationen leder, på vanligt sätt, till rekursionsrelationen

$$a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+1}a_n, \quad n \geq 0.$$

Från begynnelsevillkoren har vi $a_0 = 1$ och $a_1 = 0$. Rekursionerelationen ger nu att $a_{2k+1} = 0$, $k \geq 0$, och

$$a_{2k} = (-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}.$$

(vi får att $a_2 = 1, a_4 = -1/3, a_6 = 1/5, a_8 = -1/7, \ldots$ och använder induktion för att visa det allmänna fallet). Således har vi

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}x^{2k} \;(= 1 + x\arctan x).$$

b) Vi kan ta $\rho = 1$. Detta kan inses på följande sätt. Vi skriver ekvationen på formen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{1+x^2}y = 0.$$

Polynomet $1 + x^2$ har rötterna $x = \pm i$. Således är avståndet från 0 till någon av rötterna 1. Från Sats 5.3.1 (sidan 266) och argumentet efter satsen, följer det nu att serielösningen måste ha en kovergensradie ≥ 1. (Konvergensradien är faktiskt 1.) Konvergensradien kan också uppskattas direkt från serien ovan.

(6) Betrakta ekvationen

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

där p och q är kontinuerliga på hela $\mathbb{R}$. Antag att y_1 och y_2 är två lösninger till ekvationen, och låt $W(t) = W[y_1, y_2](t)$ beteckna Wronskideterminanten. Visa att antingen är $W(t) \neq 0$ för alla $t \in \mathbb{R}$, eller så är $W(t) = 0$ för alla $t \in \mathbb{R}$. (Tips: $W(t)$ är en lösning till en viss linjär differentialekvation av första ordningen.)

Lösning: Se boken, sats 3.2.7, sidan 154.

(7) Betrakta den icke-linjära differentialekavtionen

$$u'' + u^5 = 0.$$

a) Skriv om ekvationen som ett system och visa att den kritiska punkten $(0, 0)$ är stabil. **(2p)**
b) Visa att varje lösning $u(t)$ till ekvationen är begränsad på intervallet $[0, \infty)$. **(2p)**

Lösning: Genom att sätta $x = u$ och $y = u'$ får vi systemet

$$x' = y$$
$$y' = -x^5.$$

Det går ej att undersöka stabiliteten av $(0,0)$ via linjärisering.

a) Man kan hitta en Lyapunovfunktion (t ex $V(x,y) = x^2/2 + y^6/6$; se nedan) och använda Lyapunovs metod för att visa att $(0,0)$ är stabil. Se övningsuppgift 9.6.6 i boken.

b) Vi löser a) och b) på samma gång genom att titta på lösningskurvorna. Systemet ger ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^5}{y},$$

som är separabel (se avsnitt 9.2, sidan 515). Integrering ger

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^6}{6} = c,$$

där c är en konstant. Således, varje lösning $(x(t), y(t))$ till systemet ligger på en kurva $\frac{x^2}{2} + \frac{y^6}{6} = c$. Eftersom dessa kurvor är begränsade ser vi att speciellt $x(t) = u(t)$ är begränsad för varje t.

Om $(x(0), y(0))$ är nära origo, så kommer konstanten c vara liten, och därmed är $(x(t), y(t))$ nära origo för alla $t \geq 0$. Således är origo stabil.

(8) a) Antag att p och q är kontinuerliga på hela $\mathbb{R}$. Visa att om $y(t)$ är en icke-trivial lösning (dvs inte identiskt 0) till ekvationen $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ och om $y(t_0) = 0$ för något $t_0 \in \mathbb{R}$, så är $y'(t_0) \neq 0$. **(1p)**

b) Betrakta ekvationen

$$y'' + q(t)y = 0$$

där q är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ och uppfyller $q(t) < 0$ för alla $t \in \mathbb{R}$. Visa att om $y(t)$ är en icke-trivial lösning till ekvationen, så har y högst ett nollställe på $\mathbb{R}$. **(3p)**

Lösning: a) Eftersom p och q är kontinuerliga så följer det från entydighetssatsen att den enda lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ är den triviala lösningen $y(t) = 0$ för alla t.

b) Antag att $y(t_0) = 0$. Eftersom $y'(t_0) \neq 0$ och y' är kontinuerlig så vet vi att $y(t) \neq 0$ för alla $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$, något $\varepsilon > 0$. Antag att det finns ett $t_1 > t_0$ sådant att $y(t_1) = 0$. Välj det första sådana nollställe, dvs vi har $y(t) \neq 0$ för alla $t \in (t_0, t_1)$. Vi betraktar fallet då $y(t) > 0$ på (t_0, t_1) (det andra fallet behandlas analogt). Eftersom $y(t_0) = y(t_1) = 0$ så måste $y(t)$ ha ett maximum på $[t_0, t_1]$. Antag att detta maximum antas i punkten $t_2 \in (t_0, t_1)$. I denna punkt är $y''(t_2) \leq 0$ (eftersom vi har ett maximum). Men $y(t)$ är en lösning till differentialekvationen, så $y''(t_2) = -q(t_2)y(t_2) > 0$ eftersom $q(t_2) < 0$ och $y(t_2) > 0$. Detta är en motsägelse. Alltså finns det högst ett nollställe.