LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMEN 1
SF1664

Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder
för CFATE1 den 9 januari 2014 kl 08.00-13.00

Uppgifterna 1-3 svarar mot KS 1

1. Bestäm alla reella tal v som uppfyller ekvationen $\sin v \cos v = 0$.

LÖSNING: Ekvationen uppfylls om och endast om $\sin v = 0$ eller $\cos v = 0$, dvs om och endast om $v = n\pi$ eller $v = \pi/2 + n\pi$ för något heltal n. Detta kan sammanfattas med att $v = n\pi/2$ för något heltal n.

Svar: $v = n\pi/2$ för något heltal n

2. Låt $p(x) = x^3 - 21x + 20$. Då gäller att $p(1) = 0$, dvs $x = 1$ är ett nollställe till polynomet. Uppgift: Faktorisera polynomet i förstagradsfaktorer, dvs skriv $p(x)$ som en produkt av förstagradspolynom.

LÖSNING: Vi utför polynomdivision och får att $x^3 - 21x + 20 = (x-1)(x^2 + x - 20)$. Vi fortsätter genom att faktorisera andragradsfaktorn i högerledet. Med hjälp av pq-formeln får vi att

$$x^2 + x - 20 = 0 \Longleftrightarrow x = 4 \text{ eller } x = -5.$$

Enligt faktorsatsen får vi nu att $x^2 + x - 20 = (x-4)(x+5)$ och alltså

$$x^3 - 21x + 20 = (x-1)(x-4)(x+5),$$

vilket är den sökta faktoriseringen.

Svar: $x^3 - 21x + 20 = (x-1)(x-4)(x+5)$

3. a. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

b. Bestäm konstanten k så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{när } x \neq 0 \\ k & \text{när } x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig för alla x.

LÖSNING: a. Med hjälp av ett standardgränsvärde får vi att

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \to 0} 2 \frac{\sin 2x}{2x} = 2.$$

b. För $x \neq 0$ är $f(x)$ givet av ett elementärt uttryck och därför är f kontinuerig för alla $x \neq 0$, oberoende av hur k väljs. Vi undersöker kontinuiteten i $x = 0$. För att f ska vara kontinuerlig här krävs att $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Enligt uppgift a är $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ och enligt definitionen av f är $f(0) = k$. För kontinuitet i origo är det alltså nödvändigt och tillräckligt att $k = 2$.

Svar: a. 2. b. 2.

Uppgifterna 4-6 svarar mot KS 2

4. Derivera nedanstående funktioner med avseende på variabeln x (endast svar krävs).

   a. $f(x) = 2^x$

   b. $g(x) = e^{2x} \cos 3x$

   c. $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

   a. $k(x) = \ln \sqrt{1+x^2}$

Svar: a. $2^x \ln 2$. b. $2e^{2x} \cos 3x - 3e^{2x} \sin 3x$. c. $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. d. $\dfrac{x}{1+x^2}$

5. a. Visa att ekvationen $x^3 + 3x - 1 = 0$ har exakt en reell lösning.

   b. Låt $x_0 = 0$ och gör en iteration av Newton-Raphsons metod för att erhålla en approximation av lösningen.

   c. Avgör om din approximation är större eller mindre än lösningen.

LÖSNING: a. Sätt $f(x) = x^3 + 3x - 1$. Då är ekvationen i uppgiften ekvivalent med att $f(x) = 0$. Vi deriverar och får $f'(x) = 3x^2 + 3$ som existerar och är positivt för alla x. Det följer att f är strängt växande och $f(x) = 0$ har därför högst en lösning. Eftersom $f(0) = -1$ och $f(1) = 3$ så följer av satsen om mellanliggande värden (f är ju kontinuerlig) att $f(x) = 0$ har en lösning mellan 0 och 1.

b. Eftersom $f(0) = -1$ och $f'(0) = 3$ får vi med Newton-Raphsons metod att

$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3},$$

som är vår approximation av lösningen.

c. Eftersom $f''(x) = 6x$ som är positiv i det aktuella intervallet så är f konvex och vår approximation måste vara större än den korrekta lösningen. (Man kan också resonera så att eftersom det finns exakt en lösning och $f(0) < 0$ medn $f(1/3) > 0$ så måste lösningen ligga mellan 0 och 1/3 vilket gör att vår approximation är större än den verkliga lösningen.)

Svar: a. Se lösningen. b. 1/3. c. Större.

6. Antar funktionen $f(x) = x^3e^{-x}$ ett största och ett minsta värde? Finn största respektive minsta värdet om de finns och förklara annars varför de inte finns.

LÖSNING: Eftersom $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ så kan ett minsta värde inte finnas. För att undersöka ett eventuellt största värde gör vi teckenschema för derivatan, hittar ev extrempunkter och skissar kurvan $y = f(x)$. Vi observerar att definitionsmängden för f är alla reella tal. Vi deriverar och får $f'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = x^2e^{-x}(3 - x)$ som existerar för alla x och är 0 om och endast om $x = 0$ eller $x = 3$. Teckenstudium:

Om $x < 0$ så är $f'(x) > 0$ och f är strängt växande.

Om $0 < x < 3$ så är $f'(x) > 0$ och f är strängt växande.

Om $3 < x$ så är $f'(x) < 0$ och f är strängt avtagande.

Vi ser att f har en terasspunkt i origo och ett lokalt och globalt max i $x = 3$. Vi observerar att $\lim_{x\to\infty} = 0$.

Slutsatsen av ovanstående är att f har ett största värde som antas i $x = 3$. Det största värdet är $f(3) = 27/e^3$.

Svar: Största värdet är $27/e^3$ och minsta värde saknas.

Uppgifterna 7-9 svarar mot KS 3

7. a. Beräkna med hjälp av partiell integration $\int_1^e x \ln x \, dx$.

b. Använd substitutionen $u = \sin x$ för att beräkna $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x \, dx$.

LÖSNING: a. Vi använder partiell integration och får

$$\int_1^e x \ln x \, dx = [(x^2/2) \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2+1}{4}.$$

b. Vi använder substitutionen $u = \sin x$, med $\cos x \, dx = du$ och nya gränser 0 resp 1, och får

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x \, dx = \int_0^1 e^u \, du = e - 1.$$

Svar: a. $\frac{e^2+1}{4}$. b. $e-1$

8. a. Använd trapetsregeln och steglängd 1/2 för att approximativt beräkna

$$\int_2^3 \frac{1}{x-1} \, dx$$

b. Avgör om ditt approximativa värde är större eller mindre än det verkliga värdet.

LÖSNING: a. Med trapetsregeln och steglängden 1/2 får vi

$$\int_2^3 \frac{1}{x-1} \, dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{17}{24}.$$

b. Eftersom kurvan är konkav får vi att det approximativa värdet är större än det verkliga värdet.

Svar: a. 17/24. b. Större.

9. Beräkna integralen $\int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx$.

LÖSNING: Man kan använda partiell integration eller variabelsubstitution om man vill. Här används bara elementära omskrivningar:

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = \int_0^1 \left((x-1)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}\right) dx = \left[\frac{(1-x)^{5/2}}{5/2} - \frac{(1-x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}$$