

1. a) En matris är inverterbar om och endast om dess determinant är skild från noll.
Med Sarrus regel får vi att

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 0 - 4 - (0 + 4a + 3) = -4a + 5.$$

Alltså, om $a \neq \frac{5}{4}$ så är matrisen inverterbar.

- b) Matrisekvationen kan skrivas som $XA = B$ och eftersom $a = 1$ så är matrisen A inverterbar och vi får lösningen genom att högermultiplicera med A^{-1} ,

$$XAA^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}.$$

Vi bestämmer först A^{-1} med radoperationer,

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \ominus \\ \leftarrow \end{array} \sim \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \ominus 4 \\ \leftarrow \\ \sim \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \ominus 4 \\ \leftarrow \\ \sim \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \sim \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \oplus \quad \ominus 3 \\ \leftarrow \\ \sim \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \oplus 3 \quad \oplus 2 \quad \ominus \end{array} . \end{array}$$

Nu får vi att

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 3 & 12 & -8 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -10 & 7 \\ -4 & -17 & 12 \end{pmatrix}.$$

- c) $A = [4 \ -1 \ 4; \ -1 \ 1 \ 2; \ 0 \ 1 \ 3];$
 $B = [3 \ -1 \ 2; \ -2 \ 0 \ -1; \ 1 \ -1 \ 3];$
 $X = B/A$

2. a) Avståndet från A till C ges av

$$|\overrightarrow{AC}| = |(3, 1, 1) - (1, 2, 3)| = |(2, -1, -2)| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9}$$

och avståndet från B till C ges av

$$|\overrightarrow{BC}| = |(3, 1, 1) - (0, 2, 1)| = |(3, -1, 0)| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10}.$$

Eftersom $\sqrt{10} > \sqrt{9}$ ligger C närmare A än vad B gör.

b) Från linjens parameterform

$$(x, y, z) = (3, 1, 1) + t(1, 0, -3)$$

kan vi avläsa att vektorn $v = (1, 0, -3)$ är linjens riktning.

Punkterna A och B ligger i planet och därför är vektorn

$$\vec{AB} = (0, 2, 1) - (1, 2, 3) = (-1, 0, -2)$$

parallell med planet.

Eftersom planet är parallellt med linjen ℓ så är v och \vec{AB} två vektorer som är parallella med planet är därmed exempelvis

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \vec{OA} + s\mathbf{v} + t\vec{AB} \\ &= (1, 2, 3) + s(1, 0, -3) + t(-1, 0, -2) \end{aligned}$$

en parametrisering av planet.

c) Vektorerna $\vec{AB} = (-1, 0, -2)$ och $v = (1, 0, -3)$ är parallella med planet och det innebär att vektorn

$$\mathbf{n} = \vec{AB} \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (0, -5, 0)$$

är en normalvektor till planet.

d) Den sökta vektorn u är

- vinkelrät mot linjen ℓ , vilket innebär att den är vinkelrät mot linjens riktning v , och
- parallell med planet, vilket innebär att den är vinkelrät mot planets normalvektor n .

En vektor som uppfyller dessa villkor är

$$\mathbf{u} = v \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-15, 0, -5).$$

3. Antag att den sökta linjen skär den givna linjen i punkten

$$Q = (6, 0, 4) + t_0(3, -2, 3)$$

som svarar mot parametervärdet $t = t_0$.

Då kommer alltså vår sökta linje gå genom punkterna $P = (1, 2, 3)$ och Q , och har därmed riktningen

$$\vec{PQ} = (6, 0, 4) + t_0(3, -2, 3) - (1, 2, 3) = (5 + 3t_0, -2 - 2t_0, 1 + 3t_0).$$

Denna riktning ska vara vinkelrät mot de givna linjens riktning, som kan avläsas från parameterformen till $v = (3, -2, 3)$. Alltså ska vi ha att

$$\begin{aligned} \vec{PQ} \cdot v &= (5 + 3t_0, -2 - 2t_0, 1 + 3t_0) \cdot (3, -2, 3) \\ &= 15 + 9t_0 + 4 + 4t_0 + 3 + 9t_0 \\ &= 22 + 22t_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

vilket ger att $t_0 = -1$.

Därmed är $Q = (3, 2, 1)$ och vår sökta linje kan exempelvis skrivas i parameterformen

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \vec{OP} + t\vec{PQ} \\ &= (1, 2, 3) + t[(3, 2, 1) - (1, 2, 3)] \\ &= (1, 2, 3) + t(2, 0, -2). \end{aligned}$$