



Absolutstabilitet

1 Introduktion

För att en numerisk ODE-metod ska vara användbar måste den vara konvergent, dvs den numeriska lösningen ska närma sig den exakta lösningen när steglängden går mot noll. Det är ett ganska naturligt krav. Det betyder emellertid inte att metoden alltid fungerar bra för en *fix* steglängd även om denna är ganska liten. Följande enkla exempel visar att man i allmänhet också måste ställa krav på steglängden för att metoden ska bli praktiskt användbar.

Exempel: Vi vill lösa ODEn

$$y' = -25y, \quad y(0) = 1,$$

med två konvergenta metoder: framåt och bakåt Euler. Resultaten med steglängden $h = 0.1$ för de båda metoderna ges i Figur 1. Överst visas bakåt Euler. Den numeriska lösningen (streck markerat med cirklar) är kvalitativt lik den exakta lösningen ($y(t) = \exp(-25t)$, andra strecket). För framåt Euler, som visas nederst, blir den numeriska lösningen dock helt fel. Vi har alltså två *konvergenta* metoder som ger helt olika resultat när vi använder ett fixt h . Vi behöver ett sätt att skilja det “bra” beteendet för bakåt Euler från det “dåliga” beteendet för framåt Euler. Därför introducerar vi begreppet *absolutstabilitet*.

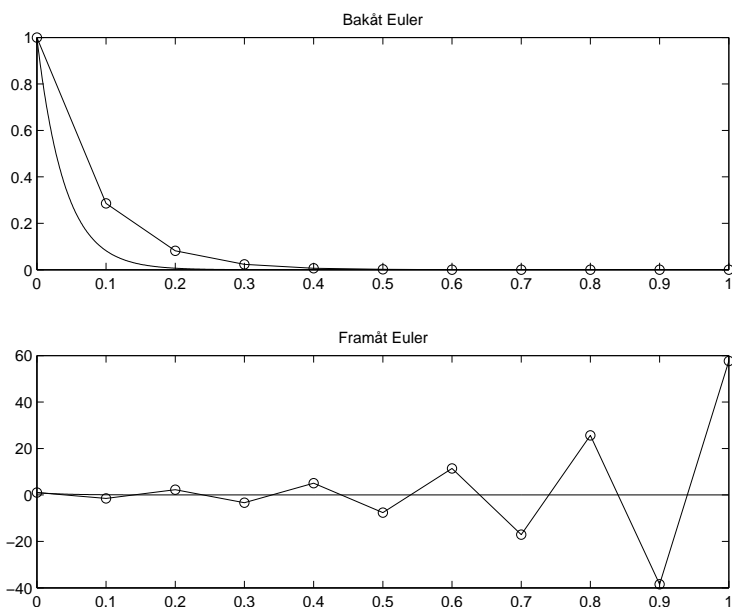


Figure 1. Steglängd $h = 0.1$.

(Notera att resultaten ovan inte motsäger det faktum att metoderna är konvergenta. När vi låter h bli mindre blir resultaten för båda metoderna lika den exakta lösningen. Om vi till exempel tar $h = 0.01$ får vi resultaten i Figur 2.)

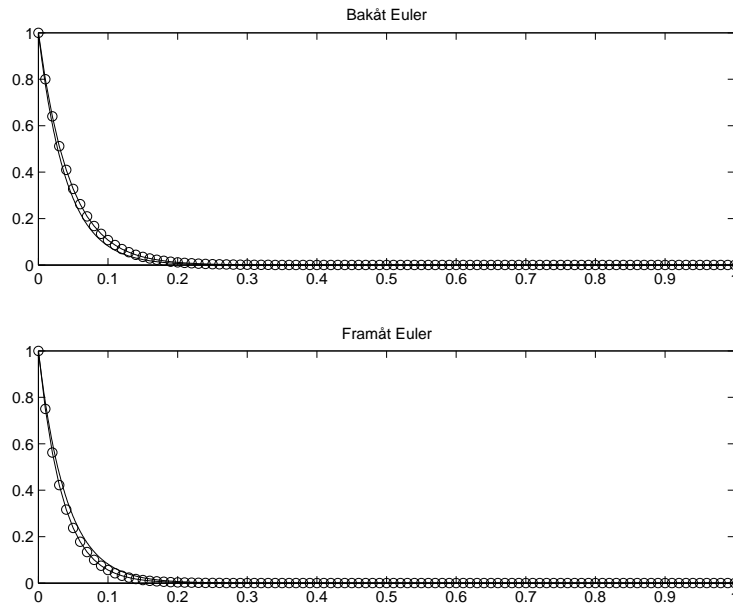


Figure 2. Steglängd $h = 0.01$.

2 Definition

Betrakta *testproblemet*

$$\begin{cases} y' = \lambda y, \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} \lambda < 0. \quad (1)$$

Lösningen $y(t) = \exp(\lambda t) \rightarrow 0$ när $t \rightarrow \infty$ eftersom $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Det minsta man kan begära är att den numeriska lösningen ska uppföra sig på samma sätt. Vi definierar därför:

Definition: En numerisk lösning $\{u_n\}$ till (1) är *absolutstabil* för ett fixt h om

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Stabiliteten kommer att bero på produkten $h\lambda$ och vi definierar också ett stabilitetsområde för dessa tal:

Definition: *Stabilitetsområdet* \mathcal{A} (“region of absolute stability”) för en numerisk metod är de komplexa tal $h\lambda$ för vilka den numeriska lösningen av (1) är absolutstabil.

Här följer två exempel på stabilitetsområden.

Exempel 1: Framåt Euler. När vi applicerar metoden på (1) får vi

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_n, \quad u_0 = 1.$$

Efter omskrivning ger detta

$$u_{n+1} = (1 + h\lambda)u_n = (1 + h\lambda)^2 u_{n-1} = \dots = (1 + h\lambda)^{n+1} u_0 = (1 + h\lambda)^{n+1}.$$

För att följderna $\{u_n\}$ ska gå mot noll måste således $h\lambda$ uppfylla

$$|1 + h\lambda| < 1. \quad (2)$$

Området \mathcal{A} är därför en cirkel i det komplexa talplanet med radie ett och centrum i -1 ; se Figur 3, vänster. När λ är *reell* reducerar (2) till uttrycket

$$-1 < 1 + h\lambda < 1 \quad \Leftrightarrow \quad h < 2/|\lambda|.$$

Exempel 2: Bakåt Euler. Här har vi

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_{n+1}, \quad u_0 = 1,$$

vilket leder till

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} u_n = \frac{1}{(1 - h\lambda)^2} u_{n-1} = \cdots = \frac{1}{(1 - h\lambda)^{n+1}} u_0 = \frac{1}{(1 - h\lambda)^{n+1}}.$$

För bakåt Euler måste därför

$$|1 - h\lambda| > 1,$$

för att följderna $\{u_n\}$ ska gå mot noll. Men eftersom realdelen av λ är negativ kommer detta villkor alltid vara uppfyllt. Stabilitetsområdet \mathcal{A} är därför hela vänstra halvan av det komplexa talplanet; se Figur 3, höger. (Ibland definierar man \mathcal{A} även för λ med positiv realdel. För bakåt Euler blir då \mathcal{A} hela komplexa talplanet förutom en cirkel med radien ett, centrerad i $+1$.)

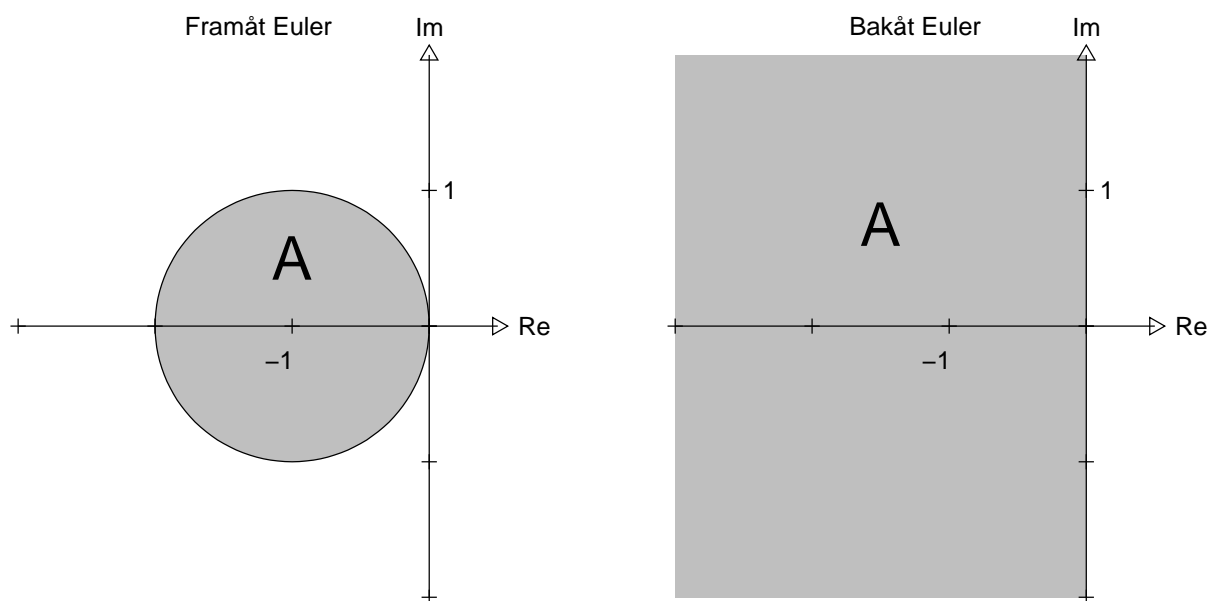


Figure 3. Stabilitetsområden för framåt och bakåt Euler.

Denna analys förklarar det inledande exemplet. I det första fallet, där $h = 0.1$, får vi att $h\lambda = -2.5 \notin \mathcal{A}$ för framåt Euler, varför lösningen växer obegränsat. I det andra fallet hade vi $h = 0.01$ och $h\lambda = -0.25 \in \mathcal{A}$. Lösningen för framåt Euler är då absolutstabil. Eftersom det inte finns någon stabilitetsgräns för bakåt Euler ger den metoden en stabil lösning i båda fallen.

Stabilitetsområdena för framåt och bakåt Euler är typexempel på stabilitetsområden för explicita respektive implicita metoder. Explicita metoder har ett begränsat stabilitetsområde vilket betyder att det alltid finns en stabilitetsgräns för h ; normalt måste h vara tillräckligt litet för att metoden ska vara absolutstabil. Framåt Euler är tex absolutstabil för probelmet

ovan om $h < 2/25 = 0.08$. Implicita metoder, å andra sidan, har vanligtvis ett obegränsat stabilitetsområde och är ofta absolutstabila för alla h . (Det finns dock exempel på implicita metoder med begränsat stabilitetsområde.) För ytterligare exempel på stabilitetsområden, se Figur 4.

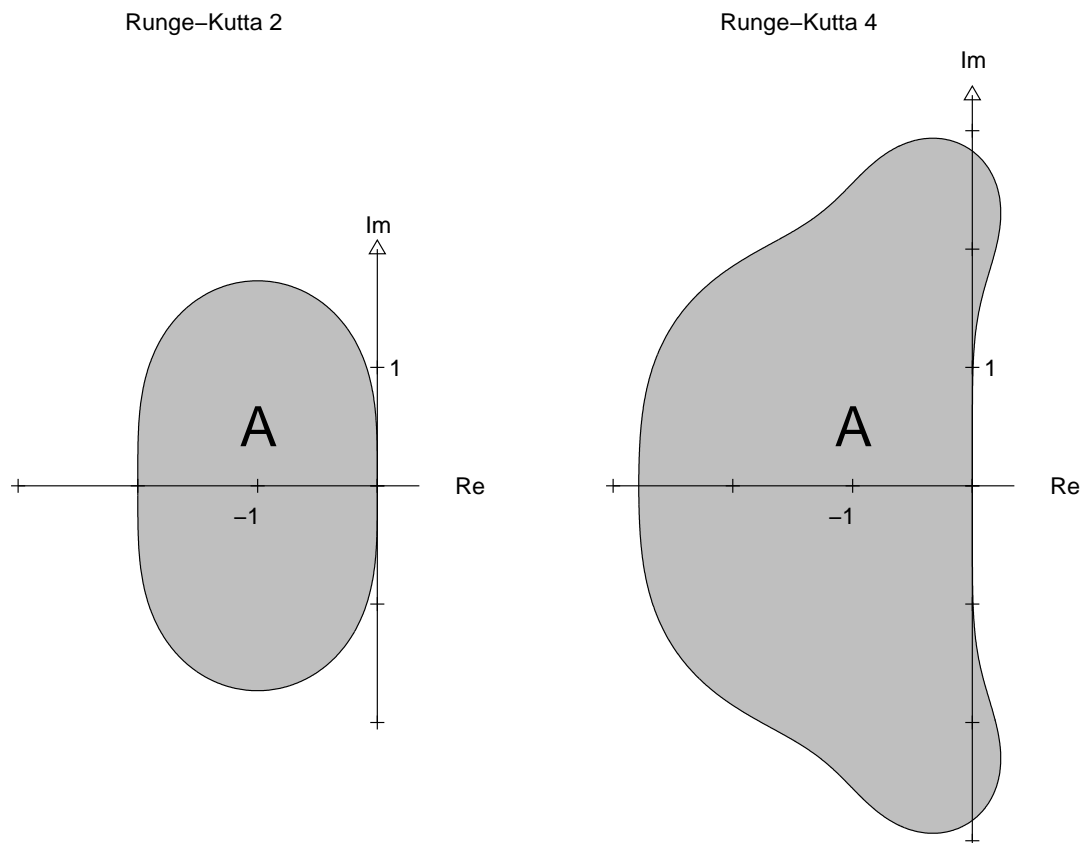


Figure 4. Stabilitetsområden för Runge–Kutta 2 (“explicita trapetsregeln”) och Runge–Kutta 4.

3 Absolutstabilitet och störningar

Begreppet absolutstabilitet har en vidare tillämpning än bara för det enkla testproblemet ovan. I allmänhet säger vi att en numerisk lösning eller numerisk metod är absolutstabil om *effekten av en liten störning i begynnelsedata u_0 försvinner i limes $n \rightarrow \infty$* . Detta är av stor vikt, eftersom alla numeriska beräkningar är behäftade med små fel. Absolutstabilitet betyder att den numeriska lösningen beter sig kvalitativt på samma sätt som den exakta lösningen. I praktiken är absolutstabilitet ett krav för att en numerisk metod ska gå att använda.

Notera att stabilitetsområdet \mathcal{A} är definierat helt i termer av det triviala testproblemet (1). Det kan dock användas även för allmänna ODEr för att avgöra om en metod är absolutstabil. Vi illustrerar detta med ett par exempel nedan. Härledningen av varför effekten av en liten störning faktiskt försvinner när $n \rightarrow \infty$ under de givna villkoren ges senare i sektion 4.

Exempel 3: Linjär skalär ODE med variabla koefficienter

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad a_{\min} \leq a(t) \leq a_{\max} < 0.$$

I detta fall blir villkoret för absolutstabilitet att

$$\boxed{ha(t) \in \mathcal{A}, \quad \forall t.}$$

(Mer precist krävs att $ha(t)$ ligger likformigt inuti i \mathcal{A} för alla t . Se sektion 4 nedan.)

Exempel 4: Linjärt system

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad A \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

Villkoret här är att

$$\boxed{h\lambda_k \in \mathcal{A}, \quad k = 1, \dots, d,}$$

där λ_k är egenvärdena till A . Notera att λ_k i allmänhet är komplexa även om A är reell. Detta är den viktigaste anledningen till att man definierar stabilitetsområdet i komplexa talplanet och inte nöjer sig med bara reella λ .

Exempel 5: Allmän ODE

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (3)$$

För allmänna olinjära ODEer som denna är villkoret att

$$\boxed{h\lambda_k(\mathbf{y}(t)) \in \mathcal{A}, \quad k = 1, \dots, d, \quad \forall t,} \quad (4)$$

där $\lambda_k(\mathbf{y})$ är egenvärdena till jakobianen $J(\mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}$. Observera att (4) ska gälla likformigt för alla lösningsvärden $\mathbf{y}(t)$ som genomlöps. Stabilitet beror därför på lösningen själv.

Vi säger att en numerisk ODE-metod är absolutstabil för (3) om villkoret i (4) är uppfyllt.

För de enkla linjära fallen i Exempel 3 och 4 ovan förenklas (4) till de villkor vi nämnt tidigare. I det skalära fallet i Exempel 1 är $J = f' = a(t)$. I fallet med system, Exempel 2, är $J = A$.

4 Härledning av stabilitetsvillkoren

Vi illustrerar mekanismen för framåt Euler. Slutsatserna vi drar är dock generella och gäller även för mer sofistikerade metoder.

4.1 Linjär skalär ODE med variabla koefficienter

I detta fall har vi

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad a_{\min} \leq a(t) \leq a_{\max} < 0. \quad (5)$$

Notera att $a(t)$ är reell och strikt negativ. En ostörd lösning $\{u_n\}$ med framåt Euler ges då av

$$u_{n+1} = u_n + h[a(t_n)u_n + b(t_n)], \quad u_0 = y_0. \quad (6)$$

Vi betraktar också en lösning $\{z_n\}$ för vilken begynnelsevärdet är stort med ett litet tal δ ,

$$z_{n+1} = z_n + h[a(t_n)z_n + b(t_n)], \quad z_0 = y_0 + \delta. \quad (7)$$

Låt nu $e_n := z_n - u_n$ beskriva effekten av den lilla störningen. Subtraktion av (6) från (7) ger en iterationsformel för $\{e_n\}$,

$$e_{n+1} = e_n + ha(t_n)e_n, \quad e_0 = \delta.$$

En omskrivning liknande den i Exempel 1 ovan ger

$$e_{n+1} = [1 + ha(t_n)]e_n = [1 + ha(t_n)][1 + ha(t_{n-1})]e_{n-1} = \dots = \delta \prod_{k=0}^n [1 + ha(t_k)].$$

Om nu $ha(t) \in \mathcal{A}$ likformigt för alla t , dvs om $|1 + ha(t)| < 1 - \varepsilon$ för alla t och något $\varepsilon > 0$, kommer absolutbeloppet av varje faktor i produkten vara strikt mindre än ett. Det betyder att

$$|e_{n+1}| \leq \delta \prod_{j=0}^n (1 - \varepsilon) = \delta(1 - \varepsilon)^{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{när } n \rightarrow \infty.$$

Vi konstaterar att i detta fall är alltså

$$\boxed{ha(t) \in \mathcal{A}, \quad \forall t, \text{ likformigt,}} \quad (8)$$

tillräckligt för att effekten av en liten störning ska försvinna när $n \rightarrow \infty$.

Kommentarer:

- $b(t)$ påverkar inte effekten av störningen.
- Man kan också göra en analys där man har en störning i varje steg, dvs då den störda lösningen $\{z_n\}$ istället för (7) ges av

$$z_{n+1} = z_n + h[a(t_n)z_n + b(t_n) + \delta_n], \quad z_0 = y_0 + \delta_0,$$

för små värden $\{\delta_n\}$. Härledningen blir då mer komplicerad och effekten av störningen går inte alltid mot noll, men under samma villkor som ovan på $ha(t)$ kan man visa att effekten är begränsad av storleken på δ_n ,

$$|e_n| \leq C \max |\delta_n|.$$

4.2 Linjärt system av ODEer

Betrakta nu det linjära systemet

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad A \in \mathbb{R}^{d \times d}. \quad (9)$$

På samma sätt som i förra exemplet får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + hA\mathbf{u}_n, & \mathbf{u}_0 &= \mathbf{y}_0, \\ \mathbf{z}_{n+1} &= \mathbf{z}_n + hA\mathbf{z}_n, & \mathbf{z}_0 &= \mathbf{y}_0 + \delta, \end{aligned}$$

och med $\mathbf{e}_n := \mathbf{z}_n - \mathbf{u}_n$,

$$\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_n + hA\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\delta}.$$

Antag att A är en diagonaliserbar matris. Då kan den skrivas

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

där Λ är en diagonalmatris med egenvärdena λ_n till A på diagonalen, och kolumnerna i S innehåller motsvarande egenvektorer \mathbf{v}_n ,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_d \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_d \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}.$$

Gör nu ett variabelbyte och sätt $\mathbf{q}_n := S^{-1}\mathbf{e}_n$. Det ger

$$\mathbf{q}_{n+1} = S^{-1}\mathbf{e}_{n+1} = S^{-1}\mathbf{e}_n + hS^{-1}(S\Lambda S^{-1})\mathbf{e}_n = \mathbf{q}_n + h\Lambda\mathbf{q}_n.$$

Betrakta de enskilda komponenterna i $\mathbf{q}_n = (q_n^1, q_n^2, \dots, q_n^d)^T$. Eftersom Λ är diagonal kopplas ekvationerna isär och vi får

$$q_{n+1}^k = q_n^k + h\lambda_k q_n^k, \quad k = 1, \dots, d.$$

Men detta är precis samma form som framåt Euler applicerat på testproblemet (Exempel 1 ovan) och vi vet att $q_n^k \rightarrow 0$ när $h\lambda_k \in \mathcal{A}$. Vi får alltså att hela vektorn

$$\mathbf{q}_n \rightarrow 0 \quad \text{om } h\lambda_k \in \mathcal{A} \text{ för } k = 1, \dots, d.$$

Eftersom $\mathbf{e}_n = S\mathbf{q}_n$ går naturligtvis även \mathbf{e}_n mot noll när \mathbf{q}_n går mot noll och vi konstaterar att i detta fall är

$$\boxed{h\lambda_k \in \mathcal{A}, \quad k = 1, \dots, d,} \quad (10)$$

tillräckligt för att effekten av en liten störning ska försvinna när $n \rightarrow \infty$.

4.3 Allmän ODE

Vi avslutar med det allmänna fallet,

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

För olinjära ODEer som denna är det svårt att ge rigorösa villkor som leder till att effekten av en liten störning försvinner i limes $n \rightarrow \infty$. Genom att anta att störningen hela tiden är liten kan man dock ge en tumregel som fungerar mycket bra i praktiken. Den kan härledas informellt på följande vis. Som tidigare får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + h\mathbf{f}(\mathbf{u}_n), & \mathbf{u}_0 &= \mathbf{y}_0, \\ \mathbf{z}_{n+1} &= \mathbf{z}_n + h\mathbf{f}(\mathbf{z}_n), & \mathbf{z}_0 &= \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\delta}, \end{aligned}$$

och med $\mathbf{e}_n := \mathbf{z}_n - \mathbf{u}_n$,

$$\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_n + h[\mathbf{f}(\mathbf{u}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{z}_n)], \quad \mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\delta}.$$

För små värden på e_n har vi att

$$e_{n+1} \approx e_n + hJ(\mathbf{u}_n)e_n, \quad e_0 = \delta.$$

där $J(\mathbf{y})$ är jakobianen till \mathbf{f} . För ett fixt n är detta på samma form som i Exempel 4. Villkor (10) ska då gälla. På samma sätt som i Exempel 3 måste det vidare gälla uniformt för alla n . Slutgiltiga villkoret blir därför

$$\boxed{h\lambda_k(\mathbf{y}(t)) \in \mathcal{A}, \quad k = 1, \dots, d, \quad \forall t.}$$