Lösningsförslag till Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 1) 25 oktober 2013 kl 8:00 - 13:00.

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonus från kontrollskrivningen gäller uppgift (1).
Preliminära betygsgränser: 14 poäng ger garanterat betyg E, 17 poäng ger garanterat betyg D, 21 poäng ger garanterat betyg C, 24 poäng ger garanterat betyg B och 28 poäng ger garanterat betyg A. Den som har 13 poäng får betyg Fx och har möjlighet att komplettera. Kontakta i så fall examinatorn.
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *BETA, Mathematics Handbook*.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar. Markera dina svar tydligt.

(1) a) Bestäm en fundamental lösningsmängd till ekvationen **(2p)**

$$ty'' + (2t-1)y' + (t-1)y = 0, \quad t > 0.$$

(Tips: det finns en lösning y på formen $y = e^{at}$).
b) Lös begynnelsevärdesproblemet **(2p)**

$$ty'' + (2t-1)y' + (t-1)y = 0, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = 0.$$

Lösning: a) Vi ser att $y_1 = e^{-t}$ är en lösning till ekvationen. För att hitta ytterliggare en lösning använder vi metoden reduktion av ordning, dvs vi söker en lösning på formen $y = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-t}$. Insättning i ekvationen ger

$$\begin{aligned}0 =& t(v''e^{-t} - 2v'e^{-t} + ve^{-t}) + (2t-1)(v'e^{-t} - ve^{-t}) + (t-1)ve^{-t} = \\ =& e^{-t}(tv'' - v').\end{aligned}$$

Låter vi $u = v'$ och dividerar med te^{-t} (vi har antagit att $t > 0$) så fås ekvationen

$$u' - \frac{1}{t}u = 0.$$

Mulitplicerar vi med den integrerande faktorn $e^{-\int (1/t)dt} = 1/t$ fås

$$\frac{d}{dt}(u \cdot 1/t) = 0$$

vilket ger $u = ct$, som i sin tur nu ger $v = c_1t^2 + c_2$. Således är, t ex, $y_2 = t^2e^{-t}$ en lösning till ekvationen. Eftersom Wronskideterminanten $W[y_1, y_2](t) = 2te^{-t} \neq 0$ för $t > 0$, så utgör alltså y_1 och y_2 en fundamental lösningsmängd till ekvationen.
b) Från a) följer att

$$y = c_1e^{-t} + c_2t^2e^{-t}$$

är den allmänna lösningen till ekvationen. Deriveras detta fås $y' = -c_1e^{-t} + 2c_2te^{-t} - c_2t^2e^{-t}$. Med hjälp av begynnelsevillkoren besämmer vi konstanterna. Vi får ekvationerna

$$\begin{aligned} 2 =& y(1) = c_1e^{-1} + c_2e^{-1} \\ 0 =& y'(1) = -c_1e^{-1} + 2c_2e^{-t} - c_2e^{-1} \end{aligned}$$

som ger $c_1 = c_2 = e^1$. Alltså, den unika lösningen är

$$y = e^{-t+1} + t^2e^{-t+1}.$$

(2) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^{-t} + 3\delta(t-1); \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Lösning: Vi använder oss av Laplacetransformen. Genom att transformera ekvationen, och använda begynnelsevillkoren, fås

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s+1} + 3e^{-s},$$

som kan skrivas

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = \frac{1}{s+1} + 3e^{-s}.$$

Eftersom $s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2$, får vi alltså

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3} + 3\frac{e^{-s}}{(s+1)^2}.$$

Vi vet att det allmänt gäller att $\mathcal{L}(u_1(t)f(t-1)) = e^{-s}F(s)$ om $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$; Beta L4. Genom att använda L22 (Beta, sid 332) får vi att

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} + 3u_1(t)(t-1)e^{-(t-1)}.$$

(3) a) Lös begynnelsevärdesproblemet **(2p)**

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Bestäm den allmänna lösningen till systemet **(2p)**

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Lösning: a) Matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

har egenvärdena $r = 3$ och $r = -1$, med motsvarande egenvektorer $\binom{1}{1}$ respektive $\binom{-1}{1}$. Således vet vi att den allmänna lösningen till systemet

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{2}$$

är

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Konstanterna c_1, c_2 bestäms nu av begynnelsevillkoret:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $c_1 = 1$ och $c_2 = 1$. Alltså, lösningen till begynnelsevärdesproblemet är

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

b) Vi behöver en partikulärlösning, och planen är att använda metoden ”variation av parametrar”. Låt

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{-t} \\ e^{3t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Då är $\Psi(t)$ en fundamentallösning till det homogena systemet (2). Vi söker en partikulärlösning till (1) på formen

$$\mathbf{x}_p = \Psi(t)\mathbf{u}(t).$$

Vi vet att $\mathbf{u}'$ ska uppfylla

$$\mathbf{u}'(t) = \Psi^{-1}(t) \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$\Psi^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-3t} \\ -e^{t} & e^{t} \end{pmatrix}$$

ger detta

$$\mathbf{u}'(t) = \Psi^{-1}(t) \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Integrerar vi detta fås

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ -t + a_2 \end{pmatrix}$$

där a_1 och a_2 är konstanter. Sätter vi $a_1 = a_2 = 0$, t ex, har vi alltså att

$$\mathbf{x}_p = \Psi(t)\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{-t} \\ e^{3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -te^{-t} \end{pmatrix}$$

är en partikulärlösning.

Slutligen, den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen (1) är

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \mathbf{x}_p = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -te^{-t} \end{pmatrix}.$$

(4) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$t(2-t)y'' - 6(t-1)y' - 4y = 0, \quad y(1) = 1,\; y'(1) = 0.$$

a) Bestäm ett intervall på vilket det givna begynnelsevärdesproblemet har en unik lösning. Motivera ditt svar. **(1p)**

b) Begynnelsevärdesproblemet har en potensserielösning på formen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-1)^n.$$

Bestäm denna lösning. **(3p)**

Lösning: a) Vi noterar att $t(2-t)$ är noll precis då $t = 0$ eller $t = 2$. Om vi skriver ekvationen på formen

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

där $p(t) = -6(t-1)/(t(2-t))$ och $q(t) = -4/(t(2-t))$ så ser vi att p och q är kontinuerliga på det öppna intervallet $]0, 2[$. Från existens och entydighets-satsen (Sats 3.2.1 i boken) följer det att begynnelsevärdesproblemet har en unik lösning på $]0, 2[$.

b) Vi har

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t-1)^{n-1}$$

och

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (t-1)^{n-2}.$$

Vi noterar att

$$1 = y(1) = a_0 \text{ och } 0 = y'(1) = a_1.$$

Innan vi stoppar in uttrycken för y, y' och y'' i ekvationen noterar vi att $t(2-t) = 1 - (t-1)^2$. Således har vi

$$0 = (1 - (t-1)^2)y'' - 6(t-1)y' - 4y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (t-1)^{n-2} -$$

$$- \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (t-1)^n - 6 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t-1)^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-1)^n$$

som vi kan skriva

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(t-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n(n-1)-6n-4)a_n(t-1)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+5n+4)a_n)(t-1)^n.$$

För att detta ska gälla måste alla koefficienterna i serien ovan vara noll, dvs

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+5n+4)a_n = 0 \text{ för alla } n \geq 0.$$

Detta ger oss rekursionsrelationen

$$a_{n+2} = \frac{n^2+5n+4}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{(n+4)(n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{n+4}{n+2}a_n,$$

dvs

$$a_{n+2} = \frac{n+4}{n+2}a_n, \quad n \geq 0.$$

Eftersom $a_1 = 0$, så följer det direkt att $a_{2k+1} = 0$ för alla $k \geq 0$. Vidare, vi har $a_0 = 1$ så

$$a_2 = \frac{4}{2}a_0 = 2, a_4 = \frac{6}{4}a_2 = 3, a_6 = \frac{8}{6}a_4 = 4, a_8 = \frac{10}{8}a_6 = 5, \ldots.$$

Det verkar allstå som att $a_{2k} = (k+1)$. Detta stämmer för $k = 0$. Om det är sant för något $j \geq 0$, dvs om $a_{2j} = (j+1)$ så har vi, om vi använder rekursionsrelationen,

$$a_{2(j+1)} = \frac{2(j+1)+2}{2(j+1)}a_{2j} = \frac{2(j+1)+2}{2(j+1)}(j+1) = (j+2).$$

Alltså, induktion ger att $a_{2k} = (k+1)$ för alla $k \geq 0$. Detta ger slutligen att

$$y = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{2k}.$$

(5) Betrakta det autonoma systemet

$$(*) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -y - xy^2. \end{aligned}$$

a) Bestäm de kritiska punkterna till systemt, samt avgör om de är stabila, asymptotiskt stabila eller instabila. **(2p)**

b) Rita ut ett fasporträtt till det motsvarande linjära system som fås då vi linjäriserar systemet (*) kring $(0,0)$. Figuren ska tydligt visa de olika beteendena hos lösningarna, dvs tydligt visa ett antal representativa banor (trajectories) . **(2p)**

Lösning: a) De kritiska punkterna ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y^2 & = 0 \\ -y - xy^2 & = 0 \end{cases}$$

Den första ekvationen ger $x = -y^2$. Sätts detta in i den andra ekvationen fås $0 = -y + y^4 = y(y^3 - 1)$ vilket ger $y = 0$ eller $y = 1$. Således vi har de två kritiska punkterna

$$(0, 0) \text{ och } (-1, 1).$$

Vi undersöker eventuell stabilitet genom att titta på motsvarande linjära system (vi linjäriserar systemet kring de kritiska punkterna). Vi har Jacobimatrisen

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ -y^2 & -1 - 2xy \end{pmatrix}$$

Om $(x, y) = (0, 0)$ har matrisen $J(0, 0)$ egenvärdena $r = \pm 1$. Eftersom vi har ett positivt egenvärde följer det att den kritiska punkten $(0, 0)$ för det ursprungliga systemet (*) är instabil.

Om $(x, y) = (-1, 1)$ har matrisen $J(-1, 1)$ egenvärdena $r = 1 \pm 2i$. Eftersom realdelen är positiv följer det att $(-1, 1)$ är instabil.

b) Då vi linjäriserar (*) kring $(0, 0)$ fås det linjära systemet

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

som har lösningarna

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Origo är således en sadelpunkt. Rita figur (se, t ex, fig 7.5.2 på sid 400).

(6) Betrakta det plana systemet

$$x' = \varepsilon x + y - x(x^2 + y^2)$$
$$y' = -x + \varepsilon y - y(x^2 + y^2)$$

där $\varepsilon \geq 0$ är en parameter.

a) För $\varepsilon = 0$, beskriv möjliga beteenden hos en lösning $(x(t), y(t))$ för $t > 0$, givet ett begynnelsevillkor $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$, samt skissa några representativa banor. (Tips: det är lämpligt att byta till polära koordinater). **(2p)**

b) Besvara samma fråga då $\varepsilon > 0$. **(2p)**

Lösning: Vi inför polära koordinater:

$$x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta.$$

(tänk på att r och θ beror på t). Vi har då $\theta = \arctan(y/x)$, och derivering (m a p t) ger

$$\theta'(t) = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xy' - x'y}{x^2+y^2}.$$

Utnyttjar vi uttrycken för x' och y' i systemet, reduceras detta till

$$\theta'(t) = -1,$$

Vidare har vi relationen $r^2 = x^2 + y^2$. Deriverar vi detta fås

$$2rr' = 2xx' + 2yy'.$$

Sätter vi in utrycken för x' och y' får vi

$$r' = r(\varepsilon - r^2).$$

Alltså, i polära koordinater kan det ursprungliga systemet skrivas

$$\begin{aligned} \theta' &= -1 \\ r' &= r(\varepsilon - r^2). \end{aligned}$$

Vi noterar att ekvationen $\theta' = -1$ har lösningen $\theta = -t + \theta_0$, dvs vinkeln θ rör sig med konstant fart medurs.

a) Vi betraktar nu fallet $\varepsilon = 0$. Vi har då $r' = -r^3$. Detta är en autonom ekvation (se kapitel 2.5); man kan lösa den om man vill. Den enda kritiska punkten är $r = 0$. Vidare ser man, genom att rita ut ett riktningsfält eller en faslinje, att varje lösning $r(t)$ till ekvationen uppfyller $\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$.

För det ursprungliga systemet betyder detta att varje lösning $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ uppfyller $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$. Eftersom vinkeln θ rör sig med konstant fart, betyder detta att varje lösning snurrar (medurs) in mot $(x, y) = (0, 0)$. Rita figur.

b) Om $\varepsilon > 0$ har vi den autonoma ekvationen $r' = r(\varepsilon - r^2)$ som har de kritiska punkterna $r = 0$ och $r = \sqrt{\varepsilon}$. Genom att rita ett riktningsfält ser man att för en lösning $r(t)$ som uppfyller $0 < r(0) < \sqrt{\varepsilon}$ gäller $\lim_{t\to\infty} r(t) = \sqrt{\varepsilon}$; för en lösning $r(t)$ som uppfyller $r(0) > \sqrt{\varepsilon}$ gäller också $\lim_{t\to\infty} r(t) = \sqrt{\varepsilon}$.

För det ursprungliga systemet får vi alltså följande bild: om $(x(0), y(0))$ ligger på cirkeln $x^2 + r^2 = \varepsilon$, så ligger $(x(t), y(t))$ på denna cirkel för alla $t > 0$ och roterar medurs med konstant fart; om $(x(0), y(0))$ ligger innanför cirkeln $x^2 + y^2 = \varepsilon$, så snurrar lösningen $(x(t), y(t))$ ut mot cirkeln $x^2 + r^2 = \varepsilon$; om $(x(0), y(0))$ ligger utanför cirkeln $x^2 + y^2 = \varepsilon$, så snurrar lösningen $(x(t), y(t))$ in mot cirkeln $x^2 + y^2 = \varepsilon$. Rita figur.

(7) Visa att det finns ett $\delta > 0$ sådant att om $|a| < \delta$ och $|b| < \delta$, så uppfyller lösningen $y = \phi(t)$ till begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 3y' + 2(y')^2 + 2y + y^3 = 0, \quad y(0) = a,\ y'(0) = b,$$

att $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$.

Lösning: Detta är ett stabilitetsproblem. För att undersöka det skriver vi om ekvationen som ett system av första ordningens ekvationer. Inför

$$u_1 = y \text{ och } u_2 = y'.$$

Då har vi

$$u_1' = y' = u_2$$

och

$$u_2' = y'' = -3y' - 2(y')^2 - 2y - y^3 = -3u_2 - 2u_2^2 - 2u_1 - u_1^3,$$

dvs vi får det autonoma systemet

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \\ u_2 &= -3u_2 - 2u_2^2 - 2u_1 - u_1^3 \end{aligned}$$

Vi undersöker om den kritiska punkten $(0,0)$ är stabil genom att linjärisera. Vi har Jacobimatrisen

$$J(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 - 3u_1^2 & -3 - 4u_2 \end{pmatrix}.$$

Matrisen $J(0,0)$ har egenvärdena $r_1 = -1$ och $r_2 = -2$. Eftersom båda egenvärdena är negativa så följer det att den kristiska punkten $(0,0)$ är asymptotiskt stabilt, dvs det finns ett $\delta_0 > 0$ sådant att om $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))$ är en lösning till systemet som uppfyller $\|\mathbf{u}(0)\| < \delta_0$, så följer det att $\mathbf{u}(t) \to 0$ då $t \to \infty$. Om vi låter $\delta = \delta_0/2$ så har vi alltså att om $|u_1(0)|, |u_2(0)| < \delta$ (så $\sqrt{u_1(0)^2 + u_2(0)^2} < \delta_0$), så $|u_1(t)|, |u_2(t)| \to 0$ då $t \to \infty$. Eftersom $u_1 = y$ och $u_2 = y'$ så är detta precis det vi skulle visa.

(8) Betrakta differentialekvationen

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

där funktionerna p och q är kontinuerliga på det öppna intervallet $I =]\alpha, \beta[$.
a) Om $\alpha = -1$ och $\beta = 1$, visa att $y = t^3$ omöjligt kan vara en lösning till ekvationen. **(1p)**
b) Antag nu att $\alpha = -\infty$ och $\beta = \infty$, dvs antag att p och q är kontinuerliga på hela $\mathbb{R}$, och att y_1 och y_2 är två lösningar som bildar en fundamental lösningsmängd till ekvationen. Om $y_2(t_1) = y_2(t_2) = 0$, där $t_1 < t_2$, och $y_2(t) \neq 0$ för $t_1 < t < t_2$, visa att y_1 har precis ett nollställe i intervallet $[t_1, t_2]$. (Tips: titta på derivatan av y_2/y_1.) **(3p)**

Lösning: a) Eftersom p och q är kontinuerliga på $]-1, 1[$ vet vi att begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

har en unik lösning, nämligen den triviala lösningen $y(t) = 0$ för alla t. Eftersom $\phi(t) = t^3$ uppfyller $\phi(0) = 0$ och $\phi'(0) = 0$ så kan alltså $y = \phi(t)$ inte vara en lösning till ekvationen (det skulle i så fall finnas två olika lösningar till samma begynnelsevillkor).

b) Eftersom y_1 och y_2 bildar en fundamental lösningsmängd så vet vi att Wronski-determinanten $W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) \neq 0$ för alla t.

Vi vill nu visa att y_1 har precis ett nollställe i intervallet $[t_1, t_2]$. Enligt ledningen ska vi titta på derivatan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right) = \frac{y_2'(t)y_1(t) - y_2(t)y_1'(t)}{y_2(t)^2} = \frac{W(t)}{y_2(t)^2}.$$

Eftersom $W(t) \neq 0$ för varje t, så måste W ha konstant tecken (W är antingen positiv överallt, eller negativ överallt). Eftersom $y_2(t)^2 \geq 0$ för alla t så ser vi alltså att $\frac{d}{dt}(y_2/y_1)$ har konstant tecken (då $y_1(t) \neq 0$). Vidare, eftersom $y_2(t_1) = 0$ och $W(t) \neq 0$ så måste $y_1(t_1) \neq 0$; på samma sätt måste vi ha $y_1(t_2) \neq 0$.

Låt nu $f(t) = y_2(t)/y_1(t)$. Vi har $f(t_1) = f(t_2) = 0$. Om $y_1(t)$ saknade nollställe i $]t_1, t_2[$ så skulle f vara deriverbar på hela $[t_1, t_2]$, och enligt Rolles sats (eller medelvärdessatsen) skulle det finnas $t_p \in [t_1, t_2]$ sådant att $f'(t_p) = 0$. Men vi har visat ovan att $f'(t) \neq 0$ för alla t då $y_1(t) \neq 0$. Alltså har måste $y_1(t)$ ha ett nollställe i intervallet $]t_1, t_2[$.

Om nu $y_1(t)$ hade två nollställen i intervallet $]t_1, t_2[$, skulle vi kunna titta på funktionen $g(t) = y_1(t)/y_2(t)$ och använda precis samma resonemang som ovan för att visa att $y_2(t)$ måste ha ett nollställe i intervallet $]t_1, t_2[$. Men detta motsäger våra antaganden på $y_2(t)$.

Vi kan således dra slutsatsen att $y_1(t)$ har precis ett nollställe i intervallet $[t_1, t_2]$.