1. a) En matris är inverterbar om och endast om dess determinant är skild från noll. Med Sarrus regel får vi att

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 0 - 4 - (0 + 4a + 3) = -4a + 5.$$

Alltså, om $a \neq \frac{5}{4}$ så är matrisen inverterbar.

b) Matrisekvationen kan skrivas som $XA = B$ och eftersom $a = 1$ så är matrisen A inverterbar och vi får lösningen genom att högermultiplicera med A^{-1},

$$XAA^{-1} = BA^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad X = BA^{-1}.$$

Vi bestämmer först A^{-1} med radoperationer,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right).$$

Nu får vi att

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 & -9 \\ 3 & 12 & -14 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -10 & 7 \\ -4 & -17 & 12 \end{pmatrix}.$$

c)
```
A = [4 -1 4; -1 1 2; 0 1 3];
B = [3 -1 2; -2 0 -1; 1 -1 3];
X = B/A
```

2. a) Avståndet från A till C ges av

$$|\overrightarrow{AC}| = |(3,1,1) - (1,2,3)| = |(2,-1,-2)| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9}$$

och avståndet från B till C ges av

$$|\overrightarrow{BC}| = |(3,1,1) - (0,2,1)| = |(3,-1,0)| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10}.$$

Eftersom $\sqrt{10} > \sqrt{9}$ ligger C närmare A än vad B gör.

b) Från linjens parameterform

$$(x, y, z) = (3, 1, 19) + t\,(1, 0, -3)$$

kan vi avläsa att vektorn $\boldsymbol{v} = (1, 1, -3)$ är linjens riktning.
Punkterna A och B ligger i planet och därför är vektorn

$$\overrightarrow{AB} = (0, 2, 1) - (1, 2, 3) = (-1, 0, -2)$$

parallell med planet.

Eftersom planet är parallellt med linjen ℓ så är $\boldsymbol{v}$ och $\overrightarrow{AB}$ två vektorer som är parallella med planet är därmed är exempelvis

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \overrightarrow{OA} + s\,\boldsymbol{v} + t\,\overrightarrow{AB}\\ &= (1, 2, 3) + s\,(1, 1, -3) + t\,(-1, 0, -2)\end{aligned}$$

en parametrisering av planet.

c) Vektorerna $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -2)$ och $\boldsymbol{v} = (1, 1, -3)$ är parallella med planet och det innebär att vektorn

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (2, -5, -1)$$

är en normalvektor till planet.

d) Den sökta vektorn $\boldsymbol{u}$ är

- vinkelrät mot linjen ℓ, vilket innebär att den är vinkelrät mot linjens riktning $\boldsymbol{v}$, och
- parallell med planet, vilket innebär att den är vinkelrät mot planets normalvektor $\boldsymbol{n}$.

En vektor som uppfyller dessa villkor är

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = (-16, -5, -7).$$

3. Antag att den sökta linjen skär den givna linjen i punkten

$$Q = (6, 0, 4) + t_0\,(3, -2, 3)$$

som svarar mot parametervärdet $t = t_0$.

Då kommer alltså vår sökta linje gå genom punkterna $P = (1, 2, 3)$ och Q, och har därmed riktningen

$$\overrightarrow{PQ} = (6, 0, 4) + t_0\,(3, -2, 3) - (1, 2, 3) = (5 + 3t_0, -2 - 2t_0, 1 + 3t_0).$$

Denna riktning ska vara vinkelrät mot de givna linjens riktning, som kan avläsas från parametformen till $\boldsymbol{v} = (3, -2, 3)$. Alltså ska vi ha att

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \cdot \boldsymbol{v} &= (5 + 3t_0, -2 - 2t_0, 1 + 3t_0) \cdot (3, -2, 3)\\ &= 15 + 9t_0 + 4 + 4t_0 + 3 + 9t_0\\ &= 22 + 22t_0\\ &= 0\end{aligned}$$

vilket ger att $t_0 = -1$.

Därmed är $Q = (3, 2, 1)$ och vår sökta linje kan exempelvis skrivas i parameterformen

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}\\ &= (1, 2, 3) + t\,[(3, 2, 1) - (1, 2, 3)]\\ &= (1, 2, 3) + t\,(2, 0, -2).\end{aligned}$$