KTH Matematik, Hans Thunberg
SF1661 Perspektiv på matematik

Workshops om derivata och integral, övning 18 och 19

(1) Förklara, utan att beräkna integralerna, varför det gäller att

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \quad \text{och} \quad \int_0^{\pi} \cos x \, dx = 0$$

(2) Lös övning 10, sidan 27, i Gottliebs *Funktionslära.* Vilken integral är det du approximerar i denna uppgift?

(3) a) Vad kan man säga om funktionen $f(x)$ och dess graf $y = f(x)$ om derivatan $f'(x) > 0$, respektive om $f'(x) < 0$, för alla x i ett visst intervall?

b) Vad kan man säga ifall andraderivatan $f''(x)$ (dvs derivatans derivata) är positiv i ett intervall? Om den den är negativ? Hur ser grafen ut i den punkt där andraderivatan byter tecken? En sådan punkt kallas en *inflektionspunkt* till f.

c) Exemplifiera med några funktioner t ex $f(x) = x^2$ och $g(x) = x^3$.

(4) a) Bestäm tangentlinjen $y = L(x) = ax + b$ till funktionen $f(x) = x^2$ i punkten $(1, 1)$. Rita sedan i samma figur tangentlinjen $y = L(x)$ och funktionsgrafen $y = f(x)$ i ett intervall kring punkten $x = 1$, t ex över intervallet $0 \leq x \leq 2$.

b) Verifiera att tangentlinjen också kan bestämmas med hjälp av formeln $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (där $x_0 = 1$ i detta fall).

c) Övertyga dig själv, genom att studera figuren, om att funktionsvärdet $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ för x nära $x_0 (= 1)$, och att approximationen blir bättre ju mindre $|x - x_0|$ är (dvs ju närmare x ligger x_0).

d) Beräkna med hjälp av den linjära approximationen approximativa värden på $(0.98)^2$ och $(1.01)^2$.

Kommentar: Formeln för linjär approximation kan också skrivas på den mer kortfattade formen

$$\Delta f \approx \frac{df}{dx} \Delta x,$$

där $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, $\dfrac{df}{dx} = f'(x_0)$ och $\Delta x = (x - x_0)$.

V G Vänd!

(5) Bestäm ett approximativt värde till $\sqrt[3]{7.9}$ genom linjär approximation av funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x}$ kring lämplig punkt .

(6) Summan $\sum_{k=1}^{100} k^4$ kan tolkas som en summa av areor hos 100 rektanglar med basen 1 och och höjder 1^4, 2^4, $\ldots$, 100^4 .

Visa med lämplig figur att

$$\int_0^{100} x^4\,dx < \sum_{k=1}^{100} k^4 < \int_0^{100} (x+1)^4\,dx$$

och visa sedan genom att beräkna integralerna och göra lämplig uppskattningar att att summans värde uppfyller

$$2 \cdot 10^9 < \sum_{k=1}^{100} k^4 < 3 \cdot 10^9.$$

Sensmoral: Knepiga summor kan ibland approximeras med enkla integraler.

(7) Under vissa förhållanden gäller att ljudets utbredningshastighet v [m/s] i luft beror på temperaturen T [K] enligt formeln

$$v = v_0\sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

där v_0 är utbredningshastigheten vid en referenstemperatur T_0. Man vill beräkna utbredningshastigheten v med hjälp av denna formel och mäter upp lufttemperaturen 300° K . Uppskatta det relativa felet i utbredningshastighet som uppstår om temperaturmätningen har ett absolut mätfel om 3° K.

Kommentar. Om den uppmätta temepraturen är T_u och den sanna temepraturen är T_s ges det relativa felet i v av

$$\frac{|v(T_s) - v(T_u)|}{|v(T_u)|}.$$

Täljaren $|v(T_s) - v(T_u)|$ kallas det absoluta felet i v.

(8) En cylinder är 10 dm hög och har ett cirkulärt tvärsnitt med radien 2 dm. Densiteten ρ hos cylindern variera med höjden enligt formeln $\rho(h) = 240 - 2h^2$ [g/dm^3]. Härled en integralformel för cylinderns massa och beräkna massan.

V G Vänd!

(9) Formulera differential- och integralkalkylens huvudsats (The fundamental theorem of calculus) och redogör för dess bevis, se **WIM** sid. 436 – 439.

(10) På sidan 438 i **WIM** förs en matematikdidaktisk diskussion om hur integralbegreppet ibland introduceras. Hur introducerades begreppet när du läste om det i gymnasiet? Vilka för- och nackdelar ser du mer att introduecera begreppet 'obestämd integral' innan den bestämda integralen introduceras?

Svar till valda uppgifter:

(2) Vid indelning i n delintervall fås ett approximativ värde på $\int_0^1 2^x \, dx$ (dvs den sökta arean) som ges av en geometrisk summa med första term $\frac{1}{n} 2^{1/n}$ och kvot $2^{1/n}$, med summa $\frac{1}{n} \frac{2^{1/n}}{2^{1/n} - 1}$ som för stora värden på n är ≈ 1.44.

(4) Tangentlinjen ges av $y = 1 + 2(x-1) \iff y = 2x - 1$. Linjär approximation kring $x_0 = 1$ ger $0.98^2 \approx 0.96$ och $1.01^2 = 1.02$.

(5) $\sqrt[3]{7.9} \approx \frac{239}{120} \approx 1.992$ (7) $1/200$