Föreläsning 8
Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg

Avdelningen för reglerteknik
Skolan för elektro- och systemteknik

27 oktober 2013

Introduktion

Förra gången:

- **Tillståndsmodell:**

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

$x(t)$	$n \times 1$ vektor (tillståndsvektor)
A	$n \times n$ matris
B	$n \times 1$ vektor
C	$1 \times n$ vektor

Dagens program:

- Observerbarhet
- Styrbarhet

Exponentialfunktionen

Hur löser vi ekvationen på förra sidan?

Från våra tidigare erfarenheter med första ordnings differentialekvationer vet vi att en *integrerande faktor* kan vara till stor hjälp.

Vi kan generalisera detta koncept och använda $e^{-A\tau}$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} e^{-A\tau} = e^{-A\tau}(-A)$$

$$\Rightarrow e^{-A\tau}\left[\dot{x} - Ax\right] = e^{-A\tau} Bu$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[e^{-A\tau} x\right] = e^{-A\tau} Bu$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[e^{-A\tau} x\right] \mathrm{d}\tau}_{e^{-At}x(t) - x(0)} = \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Exponentialfunktionen

Sista steget på förra sidan:

$$\left(\Rightarrow \underbrace{\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left[e^{-A\tau} x \right] \mathrm{d}\tau}_{e^{-At}x(t) - x(0)} = \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right)$$

Varur vi kan lösa ut ett uttryck för $x(t)$ som

$$\boxed{x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) \, \mathrm{d}\tau}$$

Observera dock att e^{At} är en matrisfunktion!

Exponentialfunktionen

Hur beräknar man e^{At}?

Lös $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{At} = Ae^{At}, \;\; e^{A\cdot 0} = I.$

1. Serieutveckla

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + ..$$

2.

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

Exponentialfunktionen

3. Diagonalisering
   Antag att A kan diagonaliseras

$$A = TDT^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \text{(egenvärden)}$$

   Då är $e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}$, där

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

   Bevis via t.ex. serieutvecklingen, $A^k = TD^kT^{-1}$.

   Observera att $e^{At} \to 0$, när $t \to \infty$ om egenvärdena till A, dvs systemts poler, ligger i V.H.P.

4. Via Cayley-Hamiltons sats.

Cayley-Hamiltons Sats

Låt

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Då är

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A + a_n I = 0$$

Observation, om A^{-1} existerar:

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_n}[A^{n-1} + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}I]$$

med $a_n = \det(-A)$!

Cayley-Hamiltons Sats, forts

$$A^n = -a_1 A^{n-1} + \ldots + -a_{n-1}A + -a_n I$$

Vad blir

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= -a_1 A^n + \ldots + -a_{n-1}A^2 + -a_n A \\ &= b_1 A^{n-1} + \ldots + b_{n-1}A + b_n I \end{aligned}$$

Fortsätt för $p \geq n$

$$A^p = b_1^{(p)} A^{n-1} + \ldots + b_{n-1}^{(p)} A + b_n^{(p)} I$$

Följaktligen

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \ldots \\ &= f_0(t)I + \ldots + f_{n-1}(t)A^{n-1} \end{aligned}$$

där $\{f_i(t)\}$ är linjärt oberoende som funktioner av t.

Exponentialfunktionen

Exempel

Antag att vi har

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi kan då räkna ut

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2}\begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Vilket sen hjälper oss bestämma e^{At} som

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observera att $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$, och att därför serieutvecklingen för e^{At} ges exakt av $e^{At} = I + At$.

Exempel (8.13)

Antag vi har systemet

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Systemets överföringsfunktion ges då av

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{2}{s+1}$$

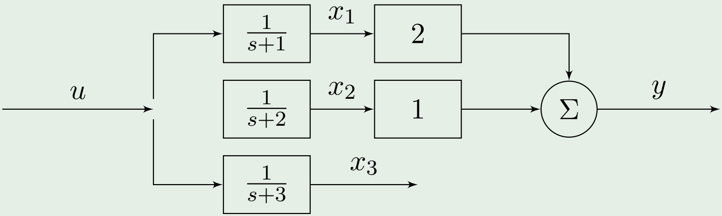
Har vi rätt antal tillstånd?

Exempel (8.13 fort.)

Vi finner x_1 genom första raden i ekvationssystemet

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u \Rightarrow x_1(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$$

och sedan på samma sätt för x_2 och x_3.

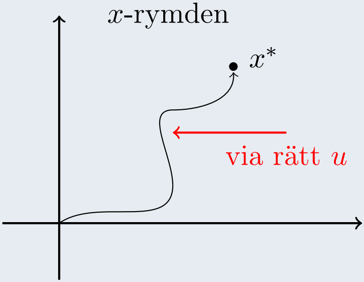


x_2 påverkas ej av u	$\Rightarrow$	Ej styrbar
x_3 syns ej i y	$\Rightarrow$	Ej observerbar

Styrbarhet

Definition (Styrbarhet)

Tillståndet x^* är styrbart om man kan styra från 0 till x^* med hjälp av u (på ändlig tid).



Test av Styrbarhet

Vi har med $x(0) = 0$

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

där

$$e^{At} = f_0(t)I + \ldots + f_{n-1}(t)A^{n-1}$$

Detta medför att

$$x(t) = \gamma_0(t)B + \gamma_1(t)AB + \ldots + \gamma_{n-1}(t)A^{n-1}B$$

där

$$\gamma_k(t) = \int_0^t f_k(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Test av Styrbarhet, forts

Dvs, de x^* som är styrbara är linjärkombinationer av vektorerna $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$, dvs ligger i *värderummet* till **styrbarhetsmatrisen**

$$\mathcal{S} = [B, AB, \ldots A^{n-1}B]$$

Systemet är **styrbart** om $\mathcal{S}$ har full rang $= n$, dvs om $\det(\mathcal{S}) \neq 0$

Styrbarhet

Exempel (Test av styrbara tillstånd)

Antag att vi har systemet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi beräknar produkten

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

för att kunna sätta in i styrbarhetsmatrisen

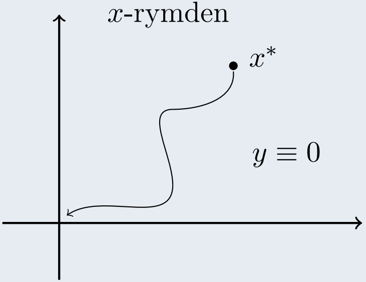
$$\mathcal{S} = [B \ AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vars determinant, $\det(\mathcal{S}) = -1 \neq 0$, säger oss att systemet är styrbart.

Observerbarhet

Definition (Observerbarhet)

Tillståndet x^* är icke observerbart om utsignalen är identiskt noll då initialvärdet är x^* och insignalen identiskt noll.



Test av Observerbarhet

Vi har med $u(t) \equiv 0$ och $x(0) = x^*$

$$y(t) = Ce^{At}x^*, \quad y^{(k)}(t) = CA^k e^{At}x^*, \quad t \geq 0$$

Speciellt gäller att $y \equiv 0$ om

$$\begin{aligned} y(0) &= Cx^* = 0 \\ \dot{y}(0) &= CAx^* = 0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(0) &= CA^{(n-1)}x^* = 0 \end{aligned}$$

Varför sluta vid $k = n - 1$?

Test av Observerbarhet, forts.

Dvs. icke-observbara tillstånd x^* ligger i *nollrummet* till **observerbarhetsmatrisen**

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Systemet är **obseverbart** om $\mathcal{O}$ har full rang $= n$, dvs om $\det(\mathcal{O}) \neq 0$

Observerbarhet

Exempel (Test av observerbara tillstånd)

Antag att vi har systemet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi beräknar produkten

$$CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

för att kunna sätta in i observerbarhetsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vars determinant, $\det \mathcal{O} = 0$, säger oss att systemet **ej** är observerbart.

Styrbarhet och Observerbarhet

Minimal: insignal-utsignalsambandet kan ej beskrivas med förre tillstånd = styrbart + observerbart

Styrbarhet och Observerbarhet

Vi säger att ett system är observerbart om **alla** tillstånd är observerbara, dvs. om $\det \mathcal{O} \neq 0$.

Exempel

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O}x^* = 0$$

$$\Longrightarrow x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Dvs. x_3 är ej observerbar.