Hemtal 1. Inlämning 17/9-2013

Lösningarna till uppgifterna ska vara väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Använd gärna Matlab för att kontrollera att du har räknat rätt.

Kom ihåg att skriva lösningarna till varje uppgift på separata blad samt fylla i ett försättsblad. Häfta INTE ihop lösningsbladen. Två av nedanstående uppgifter kommer att samlas in för rättning. Vilka meddelas på lektionen den 17/9.

Uppgift 1

Följande tre krafter, $\mathbf{F1} = (-1, -2)$ N, $\mathbf{F2} = (1, 1/2)$ N och $\mathbf{F3} = (0, -3/2)$ N verkar på en partikel som befinner sig i origo.

a) Rita ut krafterna i ett koordinatsystem.

b) Hur stor måste en fjärde kraft, $\mathbf{F4}$, verkande på partikeln, vara för att partikeln ska befinna sig i statisk jämvikt (summan av alla krafter ska vara noll) ? Rita ut kraften $\mathbf{F4}$ i samma figur som i a).

c) Visa geometriskt att summan av de fyra vektorerna blir noll.

Uppgift 2

Låt $\mathbf{a} = (-2, 1), \mathbf{b} = (-3, 1), \mathbf{c} = (4/3, -1, 2/3)$ och $\mathbf{d} = (5, 6, -1)$.

a) Beräkna

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad \text{och} \quad (\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}})\mathbf{a}.$$

b) Hitta en enhetsvektor $\mathbf{u}$ med samma riktning som $\mathbf{c}$.

c) Visa att $\mathbf{d}$ är ortogonal mot $\mathbf{c}$.

d) Använd resultaten i b) och c) för att förklara varför $\mathbf{d}$ måste vara ortogonal mot enhetsvektorn $\mathbf{u}$.

Uppgift 3

a) Bevisa att följande samband gäller för de två vektorerna **u** och **v** i $\mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

Skriv upp de satser och definitioner du använder vid konstruktion av beviset.

b) Hur ser sambandet ut om **u** är ortogonal mot **v**?

Uppgift 4

Betrakta punkten $Q = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ samt linjen L_1 som ges av

$$\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 1-t \\ z &= 2t. \end{aligned}$$

a) Bestäm planet P genom punkten Q som är vinkelrät mot linjen, L_1.

b) Visa att linjen L_2 som ges av

$$\begin{aligned} x &= 4t \\ y &= 2t \\ z &= -t \end{aligned}$$

är parallell med planet P.

Uppgift 5

För vilket/vilka värden på a är följande ekvationssystem konsistenta, dvs de har (minst) en lösning?

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & a \end{array} \qquad b)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ & & 5x_2 & + & ax_3 & = & 2 \end{array}$$

Uppgift 6

Bestäm det kubiska polynom som går genom punkterna $(0,4)$,$(1,5)$,$(2,8)$ och $(3,7)$.