Föreläsning 2
Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg

Avdelningen för reglerteknik
Skolan för elektro- och systemteknik

3 september 2013

Introduktion

Förra gången:

- Dynamiska system = Differentialekvationer
- Återkoppling

Dagens program:

- Laplacetransformen
- Blockdiagram
- PID-reglering

Laplacetransformen

Tidsfunktioner: $y(t)$, $u(t)$

Laplacetransformer:

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

Laplacetransformen

Regler:

- $\mathcal{L}\left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, y(t) \right\} = sY(s) - y(0)$
- $\mathcal{L}\left\{ \int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\} = \frac{1}{s} Y(s)$
- $\mathcal{L}\left\{ \int_0^t g(\tau) u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\} = G(s)U(s)$ $\left[\ \text{Faltning}\ \right]$
- $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{s\to 0} sY(s)$, om $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ existerar. $\left[\ \text{Slutvärdessatsen}\ \right]$

Koppling till differentialekvationer

Exempel

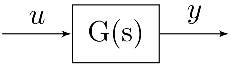
$$\begin{cases} \ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\dot{u} + b_1 u \\ y(0) = \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} s^2Y(s) + a_1 sY(s) + a_2 Y(s) = b_0 sU(s) + b_1 U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0 s + b_1}{s^2 + a_1 s + a_2}}_{\text{Överföringsfunktion, } G(s)} U(s)$$

Koppling till differentialekvationer

Överföringsfunktionen är länken mellan insignal och utsignal.



$$\Longleftrightarrow$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Poler

Definition

Systemets *poler* ges av rötterna till nämnarpolynomet hos överföringsfunktionen.

Exempel

$s^2 + a_1 s + a_2 = 0$

Exempel (Inverterad pendel)

Har poler vid $s = \pm\sqrt{g/l}$.

Poler

Exempel

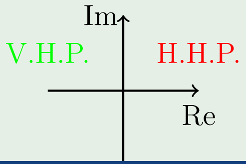
Karaktäristisk ekvation: $s^2 + a_1 s + a_2$
Rötter: λ_1, λ_2

$\Rightarrow$ Homogen lösning: $y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

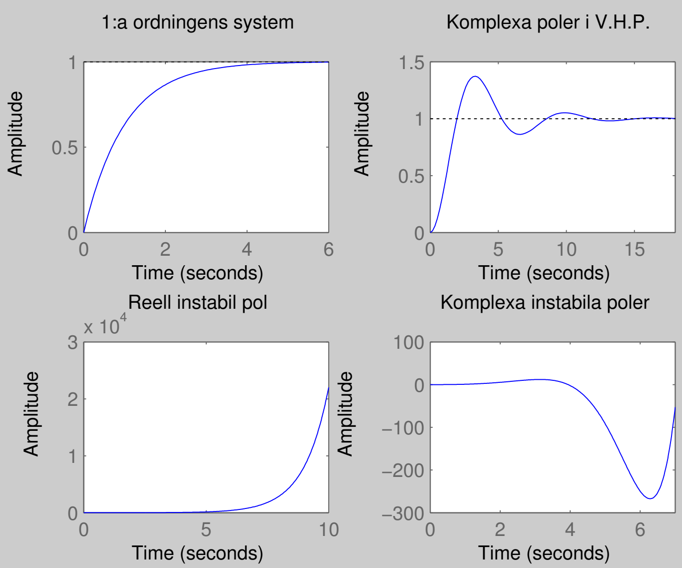
Låt nu $\lambda = x + i\omega$, där x är realdelen och ω imaginärdelen.

$$\Rightarrow e^{\lambda t} = e^{xt}\left[cos(\omega t) + isin(\omega t)\right] \rightarrow$$

$$\begin{cases} 0, & \text{Re}[\lambda] < 0, \text{ Vänster HalvPlan }, \textit{ Stabilt} \\ \infty, & \text{Re}[\lambda] > 0, \text{ Höger HalvPlan }, \textit{ Instabilt} \end{cases}$$



Typsystem



1:a ordningens system
Amplitude
1
0.5
0
0
2
4
6
Time (seconds)
Komplexa poler i V.H.P.
Amplitude
1.5
1
0.5
0
0
5
10
15
Time (seconds)
Reell instabil pol
x 10^4
3
2
1
0
Amplitude
0
5
10
Time (seconds)
Komplexa instabila poler
100
0
−100
−200
−300
Amplitude
0
2
4
6
Time (seconds)

Poler

Exempel

Bestäm utsignalen hos systemet:

$$\dot{y} + y = 20,\ y(0) = 0$$

Lösning:

$$\overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} sY(s) - y(0) + Y(s) = \frac{20}{s}$$

$$\Longrightarrow Y(s) = 20\,\frac{1}{s}\,\frac{1}{s+1} = 20\Big[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\Big]$$

$$\Longrightarrow y(t) = 20\big[1 - e^{-t}\big] \to 20, \quad t \to \infty$$

Pol i -1 i V.H.P., dvs stabilt

Nollställen

Definition

Systemets *nollställen* ges av rötterna till täljarpolynomet hos överföringsfunktionen.

Exempel

$b_0 s + b_1 = 0$

Nollställe i H.H.P. $\Longrightarrow \frac{1}{G(s)}$ är instabilt $\Longrightarrow$ Svårt reglerproblem.

Impulssvar

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\text{Faltning:} \quad \Longrightarrow y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Integralen är en viktad ”summa” av gamla ($0 \leq \tau \leq t$) insignaler (dynamik).

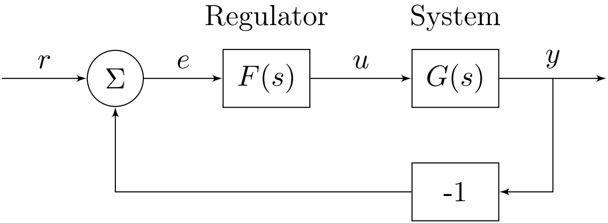
Funktionen $g(t)$ kallas *impulssvaret*.

Exempel (Integrator)

$$g(\tau) = 1$$

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Reglering



$$\Longrightarrow \begin{cases} Y(s) = G(s)F(s)E(s) \\ E(s) = R(s) - Y(s) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow Y = GFR - GFY$$

$$\Longrightarrow [1 + GF]Y = GFR$$

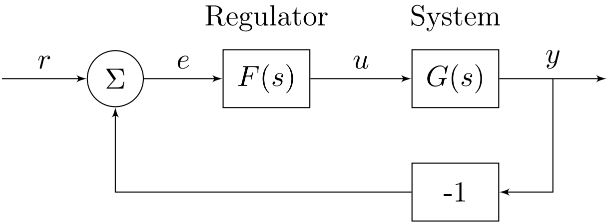
$$[1 + GF]Y = GFR$$

Härifrån får vi ett samband för hur $r(t) \mapsto y(t)$.

$$\implies Y(s) = \underbrace{\frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)}}_{G_c(s)} R(s)$$

$G_c(s)$ kallas det *återkopplade (closed loop) systemets överföringsfunktion.*

Reglering

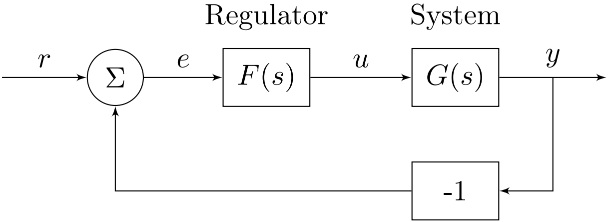


$$Y(s) = G(s)F(s)E(s)$$

Härifrån får vi ett samband för hur $r(t) \mapsto e(t)$.

$$\implies E(s) = \frac{1}{1 + G(s)F(s)} R(s)$$

Reglering



$$U(s) = F(s)E(s)$$

Härifrån får vi ett samband för hur $r(t) \mapsto u(t)$.

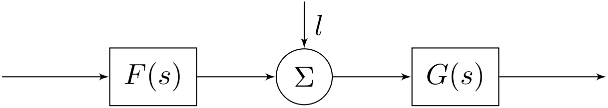
$$\Longrightarrow U(s) = \frac{F(s)}{1 + G(s)F(s)} R(s)$$

Reglering

Vi kan även få ut ett uttryck som innehåller

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

Detta berör en insignalsstörning ($l(t) \mapsto y(t)$), som vi kommer se senare i kursen.



Slutna Systemets Poler

Observera att alla dessa uttryck innehåller $1 + G(s)F(s)$, dvs.
$1 + \underbrace{\text{kretsförstärkningen}}_{G(s)F(s)}$ i nämnaren,

$\Longrightarrow$

Slutna systemets poler ges av

$$1 + G(s)F(s) = 0.$$

Bestämmer stabilitet för det återkopplade systemet!

PID-reglering

PID (Propotionell Integrerande Deriverande) reglering löser större delen av alla reglerproblem.

Exempel

En processindustri har över 1000 PID-regulatorer.

Definition (PID-Regulatorn)

$$u(t) = K\Big[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + T_D\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}\Big]$$

alt.

$$u(t) = K_P e(t) + K_I\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + K_D\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

PID-regulatorn

Den har tre stycken ”rattar” vi kan finjustera.

- ***P*ropotionell återkoppling**: $Ke(t)$ betraktar felet just nu
- ***I*ntegrerande återkoppling**: $\frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ betraktar hur felet *har* uppfört sig
- ***D*eriverande återkoppling**: $T_D\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$ betraktar hur felet *kommer* att uppföra sig

Hur ska man ställa in K, T_I och T_D?

$\Longrightarrow$ LAB 1!

PID-regulatorn

Exempel (Temperaturreglering)

$$\begin{cases} y(t) & : \text{temp. inne} \\ u(t) & : \text{el-effekt} \\ v(t) & : \text{temp. ute} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \dot{y} + \alpha y = u + \alpha v$$

Mål: Att ha $r(t)$ grader inne.

Strategi:
Öka $u(t)$ ifall det är för kallt inne.
Sänk $u(t)$ ifall det är för varmt inne.

Hur mycket?

P-reglering

P-regulator: $u(t) = K\big[r(t) - y(t)\big]$, $K > 0$.

Exempel (Temperaturreglering, P-regulering)

$\Rightarrow \dot{y} + (\alpha + K)y = Kr + \alpha v$

Antag att $r(t) = \bar{r}$ och $v(t) = \bar{v}$ (konstanter).

$\Rightarrow y(t) \overset{e^{-(\alpha+K)t}}{\longrightarrow} \frac{K}{\alpha+K}\bar{r} + \frac{\alpha}{\alpha+K}\bar{v}\ ,\ t \to \infty$

$\Rightarrow y(t \to \infty) \approx \bar{r}$ om K är stor.

Stationärt fel: $u = Ke > 0$ krävs för att hålla rätt temperatur.

Kommentar:
Stationärt = när det har svängt in sig"
Transient = medan det svänger in sig"

PI-reglering

PI-regulator: $u(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]$

Vi har vid ett stationärt tillstånd att $e(t) = 0$, annars ökar eller minskar $u(t)$ pga av integralen.

Insvängning: Antag att $u = \bar{u}$ krävs för $e(t) = 0$. Studera

$$\bar{u} = K\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]$$

Deriverar vi detta uttryck får vi

$$K\left[\dot{e} + \frac{1}{T_I}e\right] = 0$$

$$\Rightarrow e(t) = C \cdot e^{-t/T_I}$$

Om T_I är liten får vi en snabbare insvängning mot referensvärdet. (*Försämrar stabilitet!*)

Integratoruppvridning

Antag att vi har en högsta tillåten styrsignal $u_{\max}$, dvs. $u(t) \leq u_{\max}$. Om vi använder en PID-regulator och uppnår

$$u(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] > u_{\max}$$

Exempel (Bil med husvagn i uppförsbacke!)

Integratoruppvridning

Integraldelen växer ($e(t) > 0$) trots att man inte kan ställa ut mer. När man väl har nått $e(t) = 0$, måste man ha ett negativt fel ($e(t) < 0$) så att integraldelen minskar till rätt värde.

Man löser detta genom att bara integrera när felet är litet (*anti-windup*).

- JAS 39 Gripen, 1993, Långholmen (YouTube)
- JAS 39 Gripen, 1989, Pilot Induced Oscillation. Piloten för snabb P-reglering"<jmfr bilkörning, cykel>

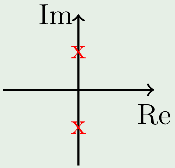
Inverterad pendel

Exempel (Inverterad pendel, Segway)

Systemet har en överföringsfunktion på formen

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - g/l}$$

P-reglering: $s^2 - g/l + K$



PI-reglering: Fungerar ej

Inverterad pendel

Exempel (Inverterad pendel, fort.)

PD-reglering:
Regulatorn ges av $F(s) = K[1 + T_d s]$ (hastighetsåterkoppling).

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{K[1 + T_D s]}{s^2 - g/l + K + KT_D s}$$

Systemets poler fås av

$$s^2 + KT_D s + K - g/l = 0$$

Väljer vi till exempel

$$T_D = 2/K, \; K = 1 + g/l$$

$$\Longrightarrow (s+1)^2 = 0$$

dvs. poler i -1. OK.

Inverterad pendel

D-verkan snabbar upp systemet och förbättrar stabiliteten.

Men för stort T_D ger motsatt verkan.

Gör vi en första ordningens Taylorutveckling av felet:

$$e(t + T_D) \approx e(t) + T_D \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e(t)$$

så kan vi tolka $T_D \approx$ prediktionshorisont.