SF1664 Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder
Tentamen 2 den 5 juni 2013 kl 8-13
LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Förklara sambandet mellan derivata och integral (analysens huvudsats).

LÖSNING

Se boken

2. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^4}\,dx$ på två olika sätt:

A. Exakt med hjälp av substitutionen $t = (x/2)^2$

B. Approximativt med hjälp av trapetsregeln och steglängden 2.

LÖSNING

A. Med substitutionen $t = (x/2)^2$ övergår xdx i dt och gränserna ändras till 0 resp 1, så vi får

$$\int_0^2 \frac{x}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^4}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

B. Trapetsregeln med steglängd 2 ger (om $f(x) = x/(1+(x/2)^4)$)

$$\int_0^1 \frac{x}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^4}\,dx \approx 2\cdot\frac{f(0)+f(2)}{2} = 0+1 = 1.$$

Svar: $\pi/4$. B. 1

3. Betrakta differentialekvationen $y'(t) + \dfrac{y(t)}{2} = 2$ med initialvillkoret $y(0) = 2$. Om $y(t)$ löser differentialekvationen och uppfyller initialvillkoret, beräkna $y(1/2)$ på två sätt:

A. Exakt genom att lösa differentialekvationen analytiskt.

B. Approximativt med hjälp av Eulers metod och steglängden 1/2.

LÖSNING

A. Lösningen y till diffekvationen har strukturen $y = y_h + y_p$ där den första termen är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation och den andra termen är någon partikulärlösning. Vi ser direkt att vi kan ta $y_p = 4$. För y_h, konstatera att den karaktäristiska ekvationen $r + 1/2 = 0$ har lösning $r = -1/2$, varför $y_h = Ce^{-t/2}$. Alltså är $y(t) = Ce^{-t/2} + 4$ den allmänna lösningen till diffekvarionen och initialvillkoret är uppfyllt om och endast om vi väljer $C = -2$. Den sökta funktionen är alltså $y(t) = 4 - 2e^{-t/2}$ och $y(1/2) = 4 - 2e^{-1/4}$ som är svaret på A.

B. Villkoret $y(0) = 2$ betyder att vår lösnings funktionskurva ska gå igenom punkten $(0, 2)$. Om diffekvationen ska vara uppylld måste kurvans lutning i denna punkt, enligt diffekvationen $y' = 2 - y/2$, vara $2 - 2/2 = 1$. Eulers metod med steglängd $1/2$ ger nu att

$$y(1/2) \approx 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Svar: A. $4 - 2e^{-1/4}$. B. $5/2$

4. Beräkna ett närmevärde till $\sqrt{104}$ med hjälp av andra gradens Maclaurinpolynom till funktionen $f(x) = \sqrt{100 + x}$. Avgör om ditt närmevärde har ett fel som till beloppet är mindre än $0,001$.

LÖSNING

Vi ser att $f(0) = 10$. Vi deriverar och får $f'(x) = (1/2)(100 + x)^{-1/2}$ vilket betyder att $f'(0) = 1/20$. Vi deriverar igen och får $f''(0) = (-1/4)(100 + x)^{-3/2}$ vilket betyder att $f''(0) = -1/4000$. Vi får att det sökta Taylorpolynomet är

$$p(x) = 10 + \frac{x}{20} - \frac{x^2}{8000}$$

och att det sökta närmevärdet fås enligt

$$\sqrt{104} = f(4) \approx p(4) = 10 + \frac{4}{20} - \frac{16}{8000} = 10.198.$$

För att uppskatta felet deriverar vi f ytterligare en gång och får
$f'''(x) = 3/8(100 + x)^{-5/2}$. Enligt Taylors formel är nu (för något tal c mellan 0 och 4) absolutbeloppet av felet

$$|f(4) - p(4)| = \frac{(3/8)(100 + c)^{-5/2}}{3!} \cdot 4^3 < \frac{4}{100000} < 0.001.$$

Felet är alltså mindre än 0.001

Svar: $\sqrt{104} \approx 10.198$ och felet i den approximationen är mindre än 0.001

5. Beräkna nedanstående integraler.

A. $\displaystyle\int_2^e \frac{dx}{x \ln x}$

B. $\displaystyle\int_2^e x \ln x \, dx$

LÖSNING

A. Med substitutionen $t = \ln x$, där dt motsvarar dx/x och gränserna byts mot $\ln 2$ resp 1, får vi

$$\int_2^e \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^1 \frac{dt}{t} = [\ln t]_{\ln 2}^1 = -\ln(\ln 2).$$

B. Med partiell integration får vi

$$\int_2^e x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_2^e - \int_2^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{4} - 2\ln 2 + 1.$$

Svar: A. $-\ln(\ln 2)$. B. $\frac{e^2}{4} - 2\ln 2 + 1$.

6. En tråd är spänd mellan punkterna 0 och 2 på x-axeln (graderad i meter). Trådens densitet varierar så att densiteten i punkten x ges av $\varrho(x) = 1 + \dfrac{x^2}{9}$ gram per meter. Beräkna trådens massa.

LÖSNING

Vi delar in tråden i små bitar. På varje sådan liten bit är densiteten ungefär konstant. Ett litet stycke Δx (meter) av tråden vid punkten x väger ungefär $(1 + \frac{x^2}{9})\,\Delta x$ gram. Vikten av hela tråden fås genom summation av bidragen från alla de små bitarna. Summan blir en Riemannsumma som vid obegränsat förfinad indelning konvergerar (eftersom densitetsfunktionen är kontinuerlig) mot integralen

$$\int_0^2 (1 + \frac{x^2}{9}) \, dx = \left[x + \frac{x^3}{27}\right]_0^2 = \frac{62}{27}$$

Svar: $\frac{62}{27}$ gram

7. Beräkna volymen av den rotationskropp K som genereras då området mellan x-axeln och kurvan $y = \sin x$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$ roteras

A. ett varv runt x-axeln.

B. ett varv runt y-axeln.

LÖSNING

A. Vi delar in x-intervallet i små bitar. På varje sådan liten bit är $\sin x$ ungefär konstant. En liten bit av längd Δx av intervallet vid punkten x ger upphov till en volym som är ungefär $\pi(\sin^2 x)\,\Delta x$. Hela volymen fås genom summation av bidragen från alla de små bitarna. Summan blir en Riemannsumma som vid obegränsat förfinad indelning konvergerar (eftersom $\pi \sin^2 x$ är kontinuerlig) mot integralen

$$\int_0^\pi \pi(\sin^2 x)\,dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

B. Vi delar in x-intervallet i små bitar. På varje sådan liten bit är $\sin x$ ungefär konstant. En liten bit av längd Δx av intervallet vid punkten x ger upphov till en volym som är ungefär $2\pi x \sin x\,\Delta x$. Hela volymen fås genom summation av bidragen från alla de små bitarna. Summan blir en Riemannsumma som konvergerar (eftersom $2\pi x \sin x$ är kontinuerlig) mot integralen

$$\int_0^\pi 2\pi x \sin x\,dx = [2\pi x(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi 2\pi(-\cos x)\,dx = 2\pi^2.$$

Svar: A. $\pi^2/2$. B. $2\pi^2$

8. Låt $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$. Bestäm värdemängden till f.

LÖSNING:

Definitionsmängden består av alla $x \neq 0$. Vi dervierar och får

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + (1/x)^2} \cdot (-1/x^2),$$

som existerar för alla $x \neq 0$. Efter förenkling ser vi att $f'(x) = 0$ för alla $x \neq 0$. Det betyder att funktionen är konstant i varje sammanhängande del av defintionsmängden. Dvs:

På intervallet $x > 0$ gäller att funktionen är konstant. Eftersom $f(1) = \pi/2$ så måste $f(x) = \pi/2$ för alla $x > 0$.

På intervallet $x < 0$ gäller att funktionen är konstant. Eftersom $f(-1) = -\pi/2$ så måste $f(x) = -\pi/2$ för alla $x < 0$.

Värdemängden till funktionen består alltså av de båda talen $\pi/2$ och $-\pi/2$.

Svar: Värdemängden är $\{-\pi/2,\ \pi/2\}$
