REGLERTEKNIK

KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1110/EL1120

Kortfattade lösningsförslag till tentamen 2013–05–31, kl. 8.00–13.00

1. (a) (i) Laplacetransform av enhetssteget är $U(s) = 1/s$, så stegsvaret ges av

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+4}\frac{1}{s}\right\} = \frac{3}{4}(1 - e^{-4t}).$$

(ii) Belopp och argument av överföringsfunktionen ges av

$$|G(i\omega)| = \frac{3}{\sqrt{\omega^2 + 16}}, \quad \arg G(i\omega) = -\arctan(\omega/4).$$

Utsignal i stationäritet ges alltså av ($\omega = 2$)

$$y(t) = \frac{3}{2\sqrt{5}}\sin(2t - \arctan(1/2)) \approx 4.47\sin(2t - 0.46).$$

(iii) Om $y(t)$ är utsignal och $u(t)$ insignal, ges en lämplig differentialekvation av

$$\dot{y}(t) + 4y(t) = 3u(t).$$

(b) (i) Styrsignalen ges av

$$u(t) = K(r(t) - y(t)) = K(r(t) - x(t) - u(t)) \Rightarrow u(t) = \frac{K}{K+1}r(t) - \frac{K}{K+1}x(t).$$

Då $r(t) = 0$ ges det slutna systemets dynamik av

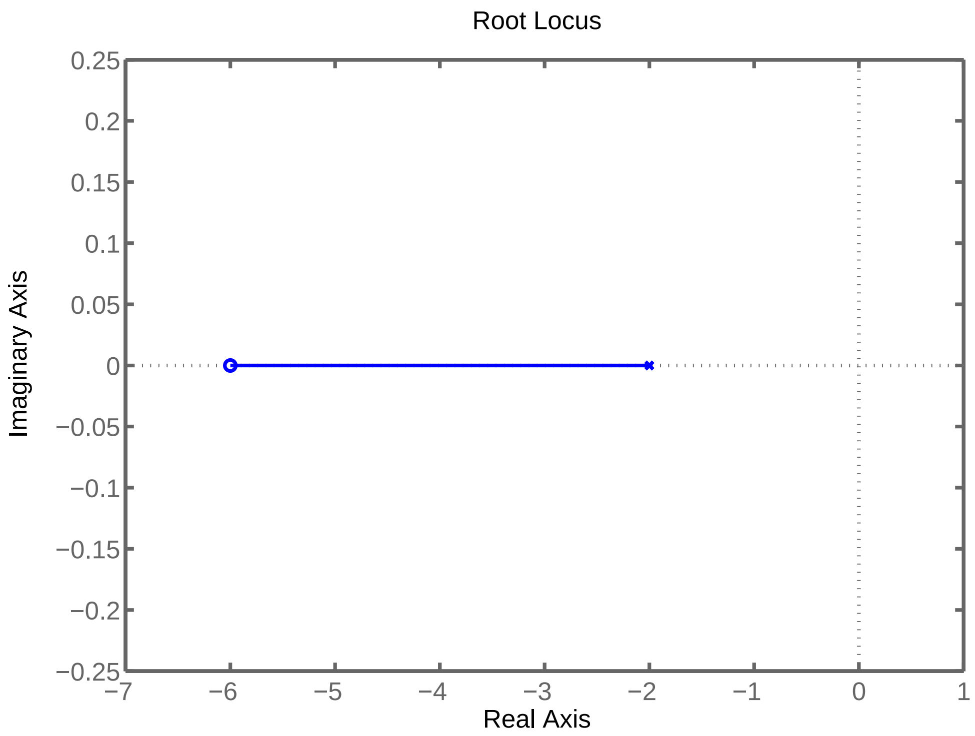
$$\dot{x}(t) = -2x(t) + 4u(t) = \left(-2 - \frac{4K}{K+1}\right)x(t).$$

Slutna systemets pol ligger alltså i $-2 - \frac{4K}{K+1}$, och med $K = 1$ hamnar den i -4.

(ii) Då $K \to 0$ går polen mot -2, och då $K \to \infty$ går den mot -6, längs reella axeln. Rotorten ser alltså ut som i figur 1.

2. (a) Vi använder tillstånden

$$x = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$



Figur 1: Rotort uppgift 1 (b) (ii).

Dynamiken (1) kan då skrivas

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -(b/m)x_2 + (1/m)u \\
y &= x_1,
\end{aligned}
$$

och tillståndsmodellen blir $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, där

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

(b) Tillståndsåterkopplingen ges av $u = -Lx + l_0 r$, där $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$ och

$$
\begin{aligned}
A - BL &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 l_1 & -0.05 - 0.01 l_2 \end{pmatrix}, \\
\det(sI - A + BL) &= \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0.01 l_1 & s + 0.05 + 0.01 l_2 \end{pmatrix} \\
&= s^2 + (0.05 + 0.01 l_2)s + 0.01 l_1 = 0 .
\end{aligned}
$$

För att slutna systemets poler ska hamna i $-1 \pm i$ ska det karakteristiska polynomet anta formen $s^2 + 2s + 2 = 0$. Genom att jämföra koefficienter får vi $l_1 = 200$ och $l_2 = 195$.

Slutna systemets överföringsfunktion från r till y är

$$Y(s) = C(sI - A + BL)^{-1} B l_0 R(s) = \frac{0.01 l_0}{s^2 + 2s + 2} R(s).$$

För att få rätt statisk förstärkning $Y(0)/R(0) = 1$ väljer vi $l_0 = 200$.

(c) Vi väljer lämpligen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.05 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i observatören. Eftersom skattningsfelet ska avta som κe^{-3t} väljer vi K så att egenvärdena till $A - KC$ hamnar i t.ex. $\{-3, -4\}$. (Notera att om man väljer $\{-3, -3\}$ avtar felet som $\kappa t e^{-3t}$, vilket inte uppfyller kravet i uppgiften.)

Då gäller

$$\det(sI - A + KC) = (s + 3)(s + 4) = s^2 + 7s + 12 = 0.$$

Eftersom $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}^T$ har vi

$$\det(sI - A + KC) = \det \begin{pmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s + 0.05 \end{pmatrix} = s^2 + (0.05 + k_1)s + 0.05k_1 + k_2 = 0,$$

vilket ger $k_1 = 6.95$ och $k_2 = 11.6525$.

3. (a) Överföringsfunktionen ges av

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left(1 + G_0(s) + \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}\right) U(s) \\ &= \left(\frac{s + 5}{s + 4} + \frac{2}{s + 7}\right) U(s) \\ &= \frac{s^2 + 14s + 43}{s^2 + 11s + 28} U(s). \end{aligned}$$

Alltså är överföringsfunktionen $G(s) = \dfrac{s^2 + 14s + 43}{s^2 + 11s + 28}$.

(b) Från bodediagrammet ser man att brytfrekvensen är kring 5 rad/s. Alltså $\omega = 5$. Under brytfrekvensen är fasen ungefär $+90^\circ$ och lutningen $+1$ dekad per dekad. Alltså är $\alpha = 1$. Över brytfrekvensen är fasen ungefär -90° och lutningen -1 dekad per dekad. Alltså bryter kurvan ner två steg och $\beta = 2$.

(c) Efter differentiering kan PI-regulatorn skrivas

$$pu(t) = 10pe(t) + 2e(t),$$

där $p = \dfrac{d}{dt}$ är differentialoperatorn. Enligt Tustins formel ska vi substituera $p \to \dfrac{2(1-q^{-1})}{0.1(1+q^{-1})}$, där q är framåtskiftoperatorn. Alltså har vi

$$\begin{aligned}(1-q^{-1})u(t) &= 10(1-q^{-1})e(t) + 0.1(1+q^{-1})e(t)\\ \Leftrightarrow u(t) &= u(t-0.1) + 10.1e(t) - 9.9e(t-0.1).\end{aligned}$$

4. För att göra bandbredden dubbelt så stor använder vi en fasavancerande länk. (En fasretarderande länk behövs inte eftersom inga krav på det statiska felet ställs.) Alltså har vi

$$F(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}.$$

Först beräknar vi skärfrekvensen (som är ungefär lika med bandbredden):

$$\begin{aligned}|G(i\omega_c)| = 1 &\Leftrightarrow \left|\frac{4}{i\omega_c(i\omega_c+3)}\right| = 1\\ &\Leftrightarrow 4^2 = \omega_c^2(\omega_c^2+9), \quad \omega_c \text{ reell}\\ &\Leftrightarrow \omega_c^4 + 9\omega_c^2 - 16 = 0, \quad \omega_c \text{ reell}\\ &\Leftrightarrow \omega_c^2 = (\sqrt{145}-9)/2 \quad (\approx 1.5208)\\ &\Leftarrow \omega_c = \sqrt{(\sqrt{145}-9)/2} \quad (\approx 1.2332).\end{aligned}$$

(Den negativa lösningen ω_c är inte intressant eftersom skärfrekvensen är positiv.) Vår önskade skärfrekvens är $\omega_{c,d} = 2\omega_c = 2.4664\,\text{rad/s}$.

För att garantera att fasmarginalen inte minskar mer än $6°$ måste vi kontrollera fasen vid ω_c och $\omega_{c,d}$:

$$\begin{aligned}\arg(G(j\omega_c)) &= 0° - 90° - \arctan(\omega_c/3) - 0.2\omega_c\frac{180°}{\pi}\\ &\approx -90° - 22.35° - 14.13°\\ &\approx -127°.\end{aligned}$$

Detta ger fasmarginalen $\varphi_m = 180° - 127° = 53°$.

Fasen vid den önskade skrärfrekvensen blir

$$\begin{aligned}\arg(G(j\omega_{c,d})) &= 0 - 90° - \arctan(\omega_{c,d}/3) - 0.2\omega_{c,d}\frac{180°}{\pi}\\ &\approx -90° - 39.42° - 28.26°\\ &\approx -158°.\end{aligned}$$

Fasmarginalen vid den önskade skrärfrekvensen är $\varphi_m^{\omega_{c,d}} = 22°$. Detta betyder att den fasavancerande länken måste öka fasen med minst $\Delta\varphi = 53° - 22° - 6° = 25°$. Från Figur 5.13, sidan 106 i *Glad & Torkel - Reglerteknik, Grundläggande teori*, får vi $\beta \approx 0.4$. Detta ger också

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = 0.6411.$$

Slutligen måste vi justera förstärkningen K så att den önskade skärfrekvensen verkligen blir $\omega_{c,d}$:

$$\begin{aligned}|F(i\omega_{c,d})||G(i\omega_{c,d})| = 1 \Leftrightarrow \frac{K}{\sqrt{\beta}}\left|\frac{4}{i\omega_{c,d}(i\omega_{c,d}+3)}\right| = 1\\ \Leftrightarrow K = \frac{\sqrt{\beta}\omega_{c,d}\sqrt{\omega_{c,d}^2+9}}{4} = 1.5145.\end{aligned}$$

Detta ger kompenseringslänken

$$F(s) = 1.5145\frac{0.6411s+1}{0.2564s+1}.$$

5. (a) Låt oss beteckna systemet med $\dot{x} = f(x,u)$ och $y = h(x,u)$.

Stationär punkt: Vi vill hitta (x^0, u^0) så att $f(x^0, u^0) = 0$, alltså $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$. Från den tredje ekvationen får vi direkt att $x_2^0 = 0$. Den andra ekvationen ger då

$$0 = \sin(\alpha)bu^0 - gm \Rightarrow u^0 = \frac{gm}{b\sin(\alpha)}.$$

Från den första ekvationen får vi (eftersom x_1^0 måste vara positiv)

$$0 = -a(x_1^0)^2 + \cos(\alpha)bu^0 \Rightarrow x_1^0 = \sqrt{\frac{\cos(\alpha)bu^0}{a}}.$$

Insättning av u^0 ger

$$x_1^0 = \sqrt{\frac{gm}{a\tan(\alpha)}}.$$

Den sista okända parametern är x_3^0. Vi inser att $f(x,u)$ inte påverkas av x_3^0, vi kan alltså välja den fritt (Detta motsvarar att vi raketen flyger på konstant höjd men att den exakta höjden inte spelar roll.).

Taylorutveckling: Om vi inför avvikelsevariabler, $\Delta x = x - x^0$, $\Delta u = u - u^0$, och $\Delta y = y - y_0 = y - x_3^0$ får vi som vanligt

$$\Delta\dot{x} = \frac{\partial f(x^0,u^0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x^0,u^0)}{\partial u}\Delta u.$$

$$\Delta y = \frac{\partial h(x^0,u^0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial h(x^0,u^0)}{\partial u}\Delta u$$

Vi beräknar Jacobianerna

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -2ax_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2ax_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)b \\ \sin(\alpha)b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{\partial h}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial h}{\partial u} = 0.$$

Vi evaluerar dessa i den stationära punkten

$$A = \frac{\partial f(x^0,u^0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{4agm}{\tan(\alpha)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{\partial f(x^0,u^0)}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)b \\ \sin(\alpha)b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Det linjäriserade systemet blir alltså

$$\Delta\dot{x} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{4agm}{\tan(\alpha)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Delta x + \begin{pmatrix} \cos(\alpha)b \\ \sin(\alpha)b \\ 0 \end{pmatrix}\Delta u$$

$$\Delta y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Delta x.$$

(b) **Styrbarhet:** Insättning av parametrarna ger $\sqrt{\frac{4agm}{\tan(\alpha)}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = 1$, $\cos(\alpha)b = 0.5 \cdot 2 = 1$, $\sin(\alpha)b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Styrbarhetsmatrisen blir alltså

$$S = [B \ AB \ A^2B] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser direkt att den har full rank men vi kan även testa detta genom att beräkna determinanten. Vi får då det $S = 3 \neq 0$. Alltså är systemet styrbart.

Observerbarhet: Observerbarhetsmatrisen ges av

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom vi har en hel rad/kolumn med nollor inser vi att denna inte har full rang och systemet är alltså inte observerbart.