

# REGLERTEKNIK

## KTH

### REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1110/EL1120

Kortfattade lösningsförslag till tentamen 2013–05–31, kl. 8.00–13.00

1. (a) (i) Laplacetransform av enhetssteget är  $U(s) = 1/s$ , så stegsvaret ges av

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s+4} \frac{1}{s} \right\} = \frac{3}{4}(1 - e^{-4t}).$$

- (ii) Belopp och argument av överföringsfunktionen ges av

$$|G(i\omega)| = \frac{3}{\sqrt{\omega^2 + 16}}, \quad \arg G(i\omega) = -\arctan(\omega/4).$$

Utsignal i stationäritet ges alltså av ( $\omega = 2$ )

$$y(t) = \frac{3}{2\sqrt{5}} \sin(2t - \arctan(1/2)) \approx 4.47 \sin(2t - 0.46).$$

- (iii) Om  $y(t)$  är utsignal och  $u(t)$  insignal, ges en lämplig differentialekvation av

$$\dot{y}(t) + 4y(t) = 3u(t).$$

- (b) (i) Styrsignalen ges av

$$u(t) = K(r(t) - y(t)) = K(r(t) - x(t) - u(t)) \Rightarrow u(t) = \frac{K}{K+1}r(t) - \frac{K}{K+1}x(t).$$

Då  $r(t) = 0$  ges det slutna systemets dynamik av

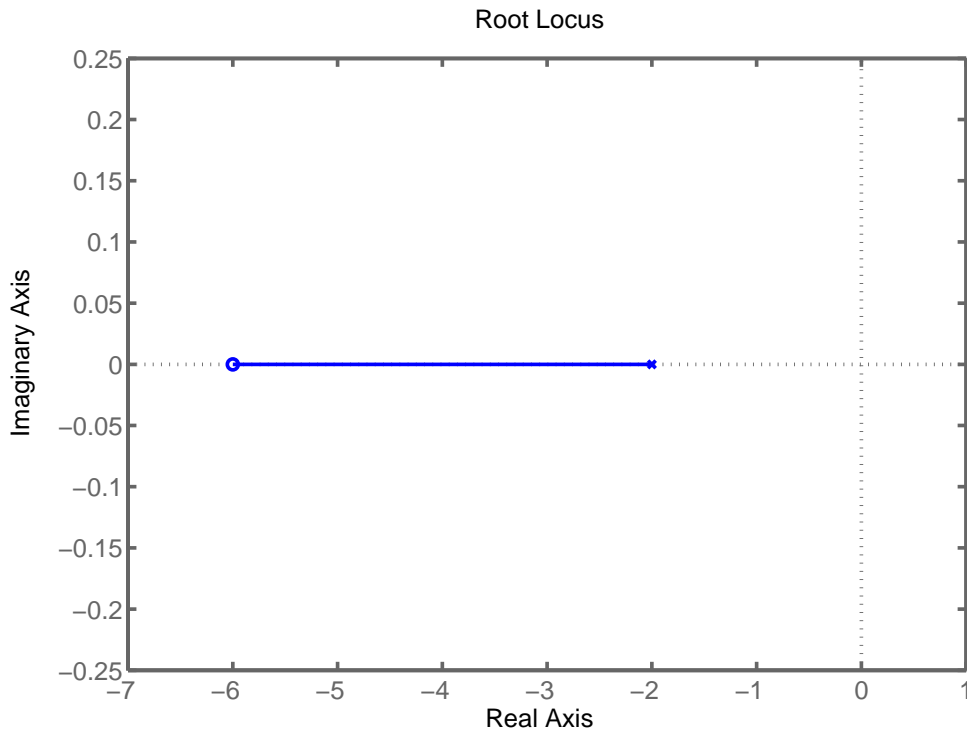
$$\dot{x}(t) = -2x(t) + 4u(t) = \left( -2 - \frac{4K}{K+1} \right) x(t).$$

Slutna systemets pol ligger alltså i  $-2 - \frac{4K}{K+1}$ , och med  $K = 1$  hamnar den i  $-4$ .

- (ii) Då  $K \rightarrow 0$  går polen mot  $-2$ , och då  $K \rightarrow \infty$  går den mot  $-6$ , längs reella axeln. Rotorten ser alltså ut som i figur 1.

2. (a) Vi använder tillstånden

$$x = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$



Figur 1: Rotort uppgift 1 (b) (ii).

Dynamiken (1) kan då skrivas

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(b/m)x_2 + (1/m)u \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

och tillståndsmodellen blir  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$ , där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0).$$

(b) Tillståndsåterkopplingen ges av  $u = -Lx + l_0r$ , där  $L = (l_1 \ l_2)$  och

$$\begin{aligned}A - BL &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.01l_1 & -0.05 - 0.01l_2 \end{pmatrix}, \\ \det(sI - A + BL) &= \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0.01l_1 & s + 0.05 + 0.01l_2 \end{pmatrix} \\ &= s^2 + (0.05 + 0.01l_2)s + 0.01l_1 = 0.\end{aligned}$$

För att slutna systemets poler ska hamna i  $-1 \pm i$  ska det karakteristiska polynomet anta formen  $s^2 + 2s + 2 = 0$ . Genom att jämföra koefficienter får vi  $l_1 = 200$  och  $l_2 = 195$ .

Slutna systemets överföringsfunktion från  $r$  till  $y$  är

$$Y(s) = C(sI - A + BL)^{-1}Bl_0R(s) = \frac{0.01l_0}{s^2 + 2s + 2}R(s).$$

För att få rätt statisk förstärkning  $Y(0)/R(0) = 1$  väljer vi  $l_0 = 200$ .

(c) Vi väljer lämpligen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.05 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0)$$

i observatören. Eftersom skattningsfelet ska avta som  $\kappa e^{-3t}$  väljer vi  $K$  så att egenvärdena till  $A - KC$  hamnar i t.ex.  $\{-3, -4\}$ . (Notera att om man väljer  $\{-3, -3\}$  avtar felet som  $\kappa t e^{-3t}$ , vilket inte uppfyller kravet i uppgiften.)

Då gäller

$$\det(sI - A + KC) = (s + 3)(s + 4) = s^2 + 7s + 12 = 0.$$

Eftersom  $K = (k_1 \quad k_2)^T$  har vi

$$\det(sI - A + KC) = \det \begin{pmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s + 0.05 \end{pmatrix} = s^2 + (0.05 + k_1)s + 0.05k_1 + k_2 = 0,$$

vilket ger  $k_1 = 6.95$  och  $k_2 = 11.6525$ .

3. (a) Överföringsfunktionen ges av

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left( 1 + G_0(s) + \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} \right) U(s) \\ &= \left( \frac{s + 5}{s + 4} + \frac{2}{s + 7} \right) U(s) \\ &= \frac{s^2 + 14s + 43}{s^2 + 11s + 28} U(s). \end{aligned}$$

Alltså är överföringsfunktionen  $G(s) = \frac{s^2 + 14s + 43}{s^2 + 11s + 28}$ .

(b) Från bodediagrammet ser man att brytfrekvensen är kring 5 rad/s. Alltså  $\omega = 5$ . Under brytfrekvensen är fasen ungefär  $+90^\circ$  och lutningen  $+1$  dekad per dekad. Alltså är  $\alpha = 1$ . Över brytfrekvensen är fasen ungefär  $-90^\circ$  och lutningen  $-1$  dekad per dekad. Alltså bryter kurvan ner två steg och  $\beta = 2$ .

(c) Efter differentiering kan PI-regulatorn skrivas

$$pu(t) = 10pe(t) + 2e(t),$$

där  $p = \frac{d}{dt}$  är differentialoperatoren. Enligt Tustins formel ska vi substituera  $p \rightarrow \frac{2(1 - q^{-1})}{0.1(1 + q^{-1})}$ , där  $q$  är framåtskiftoperatoren. Alltså har vi

$$\begin{aligned} (1 - q^{-1})u(t) &= 10(1 - q^{-1})e(t) + 0.1(1 + q^{-1})e(t) \\ \Leftrightarrow u(t) &= u(t - 0.1) + 10.1e(t) - 9.9e(t - 0.1). \end{aligned}$$

4. För att göra bandbredden dubbelt så stor använder vi en fasavancerande länk. (En fasretarderande länk behövs inte eftersom inga krav på det statiska felet ställs.) Alltså har vi

$$F(s) = K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1}.$$

Först beräknar vi skärfrekvensen (som är ungefär lika med bandbredden):

$$\begin{aligned} |G(j\omega_c)| = 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{4}{(j\omega_c + 1)(j\omega_c + 3)} \right| = 1 \\ \Leftrightarrow 4^2 &= (\omega_c^2 - 3)^2 + (4\omega_c)^2 \\ \Leftrightarrow \omega_c^4 + 10\omega_c^2 - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega_c^2 &= 0.6569 \\ \Leftrightarrow \omega_c &= 0.8105. \end{aligned}$$

(De negativa och imaginära lösningarna är inte intressanta eftersom skärfrekvensen är positiv.) Vår önskade skärfrekvens är  $\omega_{c,d} = 2\omega_c = 1.621$  rad/s.

För att garantera att fasmarginalen inte minskar mer än  $6^\circ$  måste vi kontrollera fasen vid  $\omega_c$  och  $\omega_{c,d}$ :

$$\begin{aligned} \arg(G(j\omega_c)) &= 0^\circ - \arctan(\omega_c) - \arctan(\omega_c/3) - 0.5\omega_c \frac{180^\circ}{\pi} \\ &= -39^\circ - 15.1^\circ - 23.2^\circ \\ &= -77.3^\circ. \end{aligned}$$

Detta ger fasmarginalen  $\varphi_m = 180^\circ - 77.3^\circ = 102.7^\circ$ .

Fasen vid den önskade skärfrekvensen blir

$$\begin{aligned} \arg(G(j\omega_{c,d})) &= 0 - \arctan(\omega_{c,d}) - \arctan(\omega_{c,d}/3) - 0.5\omega_{c,d} \frac{180^\circ}{\pi} \\ &= -58.3^\circ - 28.4^\circ - 46.4^\circ \\ &= -133.1^\circ. \end{aligned}$$

Fasmarginalen vid den önskade skrärfrekvensen är  $\varphi_m^{\omega_{c,d}} = 46.9^\circ$ . Detta betyder att den fasavancerande länken måste öka faser med minst  $\Delta\varphi = 102.7^\circ - 46.9^\circ - 6^\circ = 49.1^\circ$ . Från figur 5.13, sidan 106 i *Glad & Torkel - Reglerteknik, Grundläggande teori*, får vi  $\beta = 0.125$ . Detta ger också

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = 1.745.$$

Slutligen måste vi justera förstärkningen  $K$  så att den önskade skrärfrekvensen verkligen blir  $\omega_{c,d}$ :

$$\begin{aligned} |F(j\omega_{c,d})||G(j\omega_{c,d})| = 1 &\Leftrightarrow \frac{K}{\sqrt{\beta}} \left| \frac{4}{(j\omega_{c,d} + 1)(j\omega_{c,d} + 3)} \right| = 1 \\ &\Leftrightarrow K = \frac{\sqrt{\beta} \sqrt{(3 - \omega_{c,d}^2)^2 + (4\omega_{c,d})^2}}{4} = 0.574. \end{aligned}$$

Detta ger kompenseringsslänken

$$F(s) = 0.574 \frac{1.745s + 1}{0.218s + 1}.$$

5. (a) Låt oss beteckna systemet med  $\dot{x} = f(x, u)$  och  $y = h(x, u)$ .

**Stationär punkt:** Vi vill hitta  $(x^0, u^0)$  så att  $f(x^0, u^0) = 0$ , alltså  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$ . Från den tredje ekvationen får vi direkt att  $x_2^0 = 0$ . Den andra ekvationen ger då

$$0 = \sin(\alpha)bu^0 - gm \Rightarrow u^0 = \frac{gm}{b \sin(\alpha)}.$$

Från den första ekvationen får vi

$$0 = -a(x_1^0)^2 + \cos(\alpha)bu^0 \Rightarrow x_1^0 = \sqrt{\frac{\cos(\alpha)bu^0}{a}}.$$

Insättning av  $u^0$  ger

$$x_1^0 = \sqrt{\frac{gm}{a \tan(\alpha)}}.$$

Den sista okända parametern är  $x_3^0$ . Vi inser att  $f(x, u)$  inte påverkas av  $x_3^0$ , vi kan alltså välja den fritt (Detta motsvarar att vi raketten flyger på konstant höjd men att den exakta höjden inte spelar roll.).

**Taylorutveckling:** Om vi inför avvikelsevariabler,  $\Delta x = x - x^0$ ,  $\Delta u = u - u^0$ , och  $\Delta y = y - y_0 = y - x_3^0$  får vi som vanligt

$$\Delta \dot{x} = \frac{\partial f(x^0, u^0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x^0, u^0)}{\partial u} \Delta u.$$

$$\Delta y = \frac{\partial h(x^0, u^0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial h(x^0, u^0)}{\partial u} \Delta u$$

Vi beräknar Jacobianerna

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -2ax_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2ax_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)b \\ \sin(\alpha)b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{\partial h}{\partial x} = (0 \ 0 \ 1), \quad \frac{\partial h}{\partial u} = 0.$$

Vi evaluerar dessa i den stationära punkten

$$A = \frac{\partial f(x^0, u^0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{4agm}{\tan(\alpha)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{\partial f(x^0, u^0)}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)b \\ \sin(\alpha)b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Det linjäriserade systemet blir alltså

$$\Delta \dot{x} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{4agm}{\tan(\alpha)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} \cos(\alpha)b \\ \sin(\alpha)b \\ 0 \end{pmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = (0 \ 0 \ 1) \Delta x.$$

- (b) **Styrbarhet:** Insättning av parametrarna ger  $\sqrt{\frac{4agm}{\tan(\alpha)}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = 1$ ,  $\cos(\alpha)b = 0.5 \cdot 2 = 1$ ,  $\sin(\alpha)b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Styrbarhetsmatrisen blir alltså

$$S = [B \ AB \ A^2B] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser direkt att den har full rank men vi kan även testa detta genom att beräkna determinanten. Vi får då  $\det S = 3 \neq 0$ . Alltså är systemet styrbart.

**Observerbarhet:** Observerbarhetsmatrisen ges av

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom vi har en hel rad/kolumn med nollor inser vi att denna inte har full rang och systemet är alltså inte observerbart.