REGLERTEKNIK

KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1110/EL1120

Kortfattade lösningsförslag till tentamen 2012–06–09, kl. 8.00–13.00

1. (a) Systemet (1) är observerbart då observerbarhetsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ej är singulär. Då $\det(\mathcal{O}) = -1 \neq 0$ är systemet observerbart.
Systemet (1) är styrbart då styrbarhetsmatrisen

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ej är singulär. Då $\det(\mathcal{C}) = 1 \neq 0$ är systemet styrbart.
Tillståndsbeskrivningen är både styrbar och observerbar och är därför minimal.

(b) Vi kan skriva styrlagen som $u = -Lx + r$ med $L = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$. Det slutna systemet (1) får då formen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BL)x(t) + Br(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den efterfrågade överföringsfunktion ges av (se Resultat 8.3 i boken)

$$G_c(s) = C(sI - A + BL)^{-1}B.$$

Vi har

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

och

$$(sI - A + BL)^{-1} = \begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{pmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{pmatrix},$$

vilket ger $G_c(s) = \dfrac{1}{s^2 + 3s + 2}$.

(c) Vi väljer A, B och C som i deluppgift (b) ovan och

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Matrisen $A - KC$ ges av

$$A - KC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 \\ 1 & -k_2 \end{pmatrix}$$

och observatörens egenvärden är rötterna till den karakteristiska ekvationen

$$\det(sI - A + KC) = s^2 + k_2 s + k_1 = 0.$$

Med egenvärden i $\{-5, -6\}$ ges den önskade karakteristiska ekvationen av

$$(s+5)(s+6) = s^2 + 11s + 30 = 0.$$

Alltså blir parametrarna

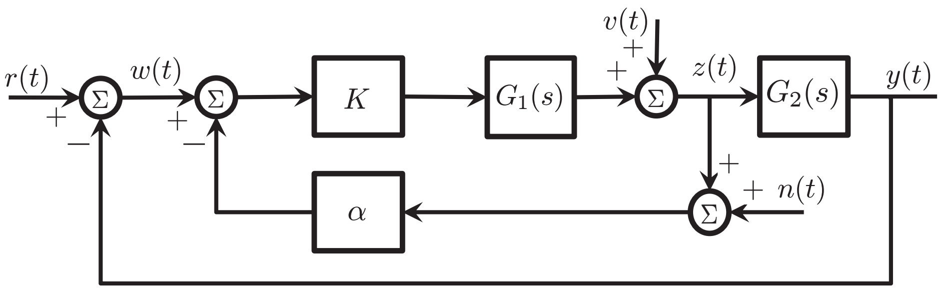
$$k_1 = 30, \quad k_2 = 11.$$

Skattningen $\hat{x}(t)$ konvergerar mot $x(t)$ enligt

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq c \cdot \|x(0) - \hat{x}(0)\| e^{-5t}$$

enligt ekvation (9.22) i boken och där c är en konstant.

2. (a) Börja med att skriva upp överföringsfunktionen för den inre loopen. Inför därför signalerna $w(t)$ och $z(t)$ enligt figur 1.



Figur 1: Blockdiagram till uppgift 2.

För inre loopen gäller följande samband mellan signalernas Laplacetransformer:

$$Z = V + G_1 K (W - \alpha(N + Z)) \Rightarrow Z = \frac{1}{1 + \alpha K G_1}(V - \alpha K G_1 N + K G_1 W).$$

För yttre loopen gäller sambandet

$$Y = G_2 Z = \frac{G_2}{1 + \alpha K G_1}(V - \alpha K G_1 N + K G_1 (R - Y))$$

eftersom $W = R - Y$. Löser vi ut Y har vi

$$Y = \frac{G_2}{1 + \alpha K G_1 + K G_1 G_2}(V - \alpha K G_1 N + K G_1 R).$$

Alltså är svaret på (i)

$$\frac{K G_1 G_2}{1 + \alpha K G_1 + K G_1 G_2},$$

svaret på (ii)

$$\frac{G_2}{1 + \alpha K G_1 + K G_1 G_2}$$

och svaret på (iii)

$$-\frac{\alpha K G_1 G_2}{1 + \alpha K G_1 + K G_1 G_2}.$$

(b) Det slutna systemets karakteristiska ekvation ges av

$$1 + \alpha K G_1 + K G_1 G_2 = 0 \Rightarrow s^2 + (1 + K)s + K = 0,$$

vilket vi också kan skriva på formen $P(s) + KQ(s)$ med $P(s) = s^2 + s$ och $Q(s) = s + 1$. Startpunkterna ligger alltså i $s = 0$ och $s = -1$. En slutpunkt ligger i $s = -1$ och en rot går asymptotiskt mot oändligheten längs negativa reella axeln. Systemet är alltså asymptotiskt stabilt för $K > 0$. Rotorten visas i figur 2.

3. Slutna systemets överföringsfunktion är $G_c(s) = \dfrac{G(s)F_{PID}(s)}{1 + G(s)F_{PID}(s)}$, vilket ger

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{4(K_D s^2 + K_P s + K_I)}{s(s^2 + 6s + 4) + 4(K_D s^2 + K_P s + K_I)} \\ &= \frac{4(K_D s^2 + K_P s + K_I)}{s^3 + (6 + 4K_D)s^2 + (4 + 4K_P)s + 4K_I}. \end{aligned}$$

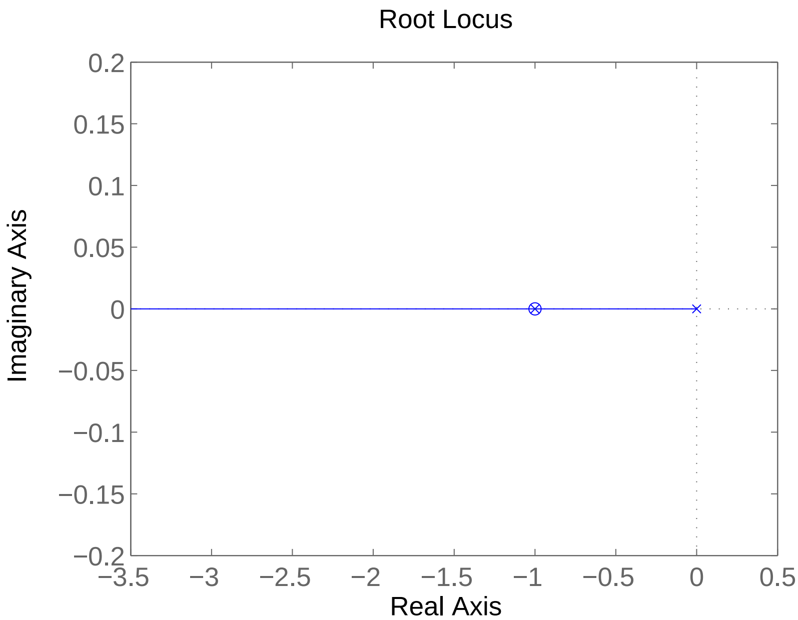
Önskad form på den karakteristiska ekvationen är

$$(s + 10)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2) = s^3 + (10 + 2\zeta\omega_0)s^2 + (20\zeta\omega_0 + \omega_0^2)s + 10\omega_0^2 = 0.$$

Genom att jämföra koefficienterna med nämnarpolynomet i $G_c(s)$ fås ekvationerna

$$\begin{aligned} 10 + 2\zeta\omega_0 &= 6 + 4K_D \Rightarrow K_D = 1.8 \\ 20\zeta\omega_0 + \omega_0^2 &= 4 + 4K_P \Rightarrow K_P = 8 \\ 10\omega_0^2 &= 4K_I \Rightarrow K_I = 10, \end{aligned}$$

där vi använt $\zeta = 0.8$ och $\omega_0 = 2$.



Figur 2: Rotort till uppgift 2 (b).

4. (a) i. Laplacetransformation av differentialekvationen och PI-regulatorn ger

$$sY(s) = -4Y(s) + sU(s) + 3U(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{s+3}{s+4}U(s) = G(s)U(s)$$
$$U(s) = \frac{1}{2}E(s) + \frac{1}{2s}E(s) \Rightarrow U(s) = \frac{s+1}{2s}E(s) = F(s)E(s)$$

där $E(s) = R(s) - Y(s)$. Vi kan räkna ut överföringsfunktionen från $R(s)$ till $E(s)$ som

$$E(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)}R(s) = \frac{1}{1+\frac{s+1}{2s}\frac{s+3}{s+4}}R(s) = \frac{2s^2+8s}{3s^2+12s+3}R(s).$$

Slutna systemets poler ligger i $s = -2 \pm \sqrt{3}$ (strikt i komplexa vänstra halvplanet) och alltså är det asymptotiskt stabilt och vi får använd slutvärdessatsen. Då referensen är en stegfunktion gäller $R(s) = \frac{1}{s}$ och vi har

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2s^2+8s}{3s^2+12s+3} = 0.$$

Alltså är statiska reglerfelet här 0.

ii. Då referensen är en rampfunktion gäller $R(s) = \frac{1}{s^2}$ och vi har

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2s+8}{3s^2+12s+3} = 8/3.$$

Alltså är statiska reglerfelet här $8/3 \approx 2.67$.

(b) Systemet är asymptotiskt stabilt (pol i $s = -2$) och linjärt. Alltså kan vi summera den stationära utsignalen då insignalen är $u_1(t) = 2$ och då den är $u_2(t) = \sin(2t)$ för att få totala stationära utsignalen $y(t)$.

Den stationära utsignalen då $u_1(t) = 2$ är $y_1(t) = |G(0)|u_1(t) = 4\frac{1}{2}u_1(t) = 4$.

Den stationära utsignalen då $u_2(t) = \sin(2t)$ är

$$\begin{aligned} y_2(t) = |G(i2)|\sin(2t + \arg G(i2)) &= \sqrt{10}\sin(2t + \arctan(2) - \pi/4) \\ &\approx 3.1623\sin(2t + 0.3218) \end{aligned}$$

och alltså blir totala utsignalen

$$y(t) = 4 + 3.1623\sin(2t + 0.3218).$$

5. (a) Vi börjar med ω_c. Fastoppen i $F_{lead}(i\omega)$ ligger vid 20 rad/s. Vi tittar där och ser att $|G(i20)| \approx 0.3$ och $|F_{lead}(i20)| \approx 3.3$. Eftersom beloppet av det öppna systemet då ges av $|G_o(i20)| = 3.3 \cdot 0.3 = 1$ har vi $\omega_c = 20$ rad/s.

För fasmarginalen läser vi av båda kurvorna vid $\omega_c = 20$. Vi har $\arg(G_o(i\omega_c)) = \arg(F_{lead}(i\omega_c)) + \arg(G(i\omega_c)) \approx 30^\circ - 173^\circ \implies \varphi_m = 37^\circ$.

För ω_p har vi $\arg(G_o)(i\omega_p)) = \arg(F_{lead}(i\omega_p)) + \arg(G(i\omega_p)) = -180^\circ$. Vi ser att detta är uppfyllt för $\omega_p \approx 33$ rad/s, eftersom vi då har $\arg(G(i33)) \approx -207^\circ$ och $\arg(F_{lead}(i33)) \approx 27^\circ$.

Vi har $A_m = \dfrac{1}{|G_o(i\omega_p)|} \approx \dfrac{1}{0.11 \cdot 4.2} \approx 2.2$.

Det återkopplade systemet är stabilt och det inses eftersom $\varphi_m > 0$, eller om man så vill för att $A_m > 1$.

(b) Ja den skulle vara stabil. Vi ser detta eftersom faskurvan av $K_P G(s)$ är identisk med faskurvan av $G(s)$ och φ_m är positiv för både $\omega_c = 20$ rad/s och $\omega_c = 13$ rad/s.

(c) Från teorin vet vi att den maximala fashöjningen φ_{max} bestäms av β. Ur bodediagrammet ser vi $\varphi_{max} = 30^\circ$. Vi kan antingen använda formeln $\varphi_{max} = \arctan\left(\dfrac{1-\beta}{2\sqrt{\beta}}\right)$ eller titta i figur 5.13 i boken för att se att detta motsvarar $\beta = 0.33$.

Vidare vet vi att den maximala fashöjningen hamnar vid $\omega_{\max} = \dfrac{1}{\tau_D\sqrt{\beta}}$. Ur bodediagrammet ser vi att $\omega_{\max} = 20$ rad/s. Detta tillsammans med β ger oss att $\tau_D = 0.087$ s.

För att bestämma K observerar vi att

$$|F_{lead}(i\omega_c)||G(i\omega_c)| = K\left|\frac{0.087 \cdot i20 + 1}{0.33 \cdot 0.087 \cdot i20 + 1}\right| 0.3 = 1.$$

Detta ger $K = \dfrac{1}{1.74 \cdot 0.3} \approx 1.9$. Vi kan även se det genom att $|F_{lead}(0)| = K$.