REGLERTEKNIK

KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1110/EL1120

Kortfattade lösningsförslag till tentamen 2012–12–17, kl. 9.00–14.00

1. (a) (i) Överföringsfunktionen ges av

$$\begin{aligned} G(s)U(s) &= G_0(s)U(s) + G_1(s)(U(s) + G_0(s)U(s)) \\ &= [G_0(s) + G_1(s) + G_0(s)G_1(s)]U(s). \end{aligned}$$

Alltså $G(s) = \dfrac{1}{s+4} + \dfrac{2}{s+5} + \dfrac{2}{(s+4)(s+5)} = \dfrac{3}{s+4}$.

(ii) Pol i $s = -4$ och inga nollställen. Eftersom inga poler eller nollställen finns i komplexa högra halvplanet så är systemet minimumfas.

(iii) Systemet är asymptotiskt stabilt och dess transient dör ut då $u(t) = \sin(t)$ appliceras. Den stationära lösningen ges av

$$\begin{aligned} y(t) &= |G(i)| \sin(t + \arg G(i)) = \frac{3}{|i+4|} \sin(t - \arg(i+4)) \\ &= \frac{3}{\sqrt{17}} \sin(t - \arctan(1/4)) \approx 0.728 \sin(t - 0.245). \end{aligned}$$

(b) Först hittar vi det stationära tillståndet som uppfyller

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0, u_0) = -x_0^3 + u_0 = -x_0^3 + 8 \\ y_0 &= h(x_0, u_0) = x_0^2, \end{aligned}$$

varur vi får $x_0 = 2$ och $y_0 = 4$. Jacobianerna kan nu beräknas som

$$\begin{aligned} A &= f_x(x_0, u_0) = -3x_0^2 = -12 & \qquad B &= f_u(x_0, u_0) = 1 \\ C &= h_x(x_0, u_0) = 2x_0 = 4 & \qquad D &= h_u(x_0, u_0) = 0. \end{aligned}$$

Det linjäriserade systemet är alltså

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Delta x &= -12\Delta x + \Delta u \\ \Delta y &= 4\Delta x, \end{aligned}$$

där $\Delta x = x - 2$, $\Delta u = u - 8$ och $\Delta y = y - 4$. Systemet är stabilt eftersom $A = -12 < 0$.

2. (a) Vi använder tillstånden

$$x = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$

Dynamiken (1) kan då skrivas

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(b/m)x_2 + (1/m)u, \end{aligned}$$

och tillståndsmodellen blir $\dot{x} = Ax + Bu$ där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}.$$

(b) Kontrollera om modellen är styrbar genom att bilda styrbarhetsmatrisen $S = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix}$. Vi får

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ 1/m & -b/m^2 \end{pmatrix} \\ \det(S) &= -1/m^2 \neq 0\,. \end{aligned}$$

Alltså är modellen styrbar.
Tillståndsåterkopplingen ges av $u = -Lx + l_0 r$, där $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$ och

$$\begin{aligned} A - BL &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1/m & -(b + l_2)/m \end{pmatrix}, \\ \det(sI - A + BL) &= \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ 10l_1 & s + 10(0.05 + l_2) \end{pmatrix} = s^2 + (0.5 + 10l_2)s + 10l_1 = 0\,. \end{aligned}$$

För att slutna systemets poler ska hamna i $(-2, -3)$ ska det karakteristiska polynomet anta formen $s^2 + 5s + 6 = 0$. Genom att jämföra koefficienter får vi $l_1 = 0.6$ och $l_2 = 0.45$.
Slutna systemets överföringsfunktion från r till z_1 är

$$Z_1(s) = (1 \quad 0)(sI - A + BL)^{-1} B l_0 R(s) = \frac{10 l_0}{s^2 + 5s + 6} R(s).$$

För att få rätt statisk förstärkning $Z_1(0)/R(0) = 1$ väljer vi $l_0 = 0.6$.

(c) Vi väljer lämpligen en mätsignal/utsignal som gör modellen observerbar eftersom vi då kan skatta alla tillstånd godtyckligt snabbt.
Med en hastighetsmätare har vi utsignalen $y = Cx = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$. Observerbarhetsmatrisen blir då

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/m \end{pmatrix}.$$

Systemet är då icke-observerbart eftersom $\det(O) = 0$.

Med en GPS som ger en absolut positionsmätning har vi utsignalen $y = Cx = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$. Observerbarhetsmatrisen blir då

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Systemet är då observerbart eftersom $\det(O) = 1 \neq 0$.

Alltså bör vi rekommendera konstruktören att välja positionsmätningen.

(d) Vi har valt positionsmätningen och alltså $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. En observatör är på formen

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky.$$

Eftersom observatören ska användas till att implementera styrlagen ovan gör vi egenvärdena något snabbare än -2 och -3, t.ex. -4 och -5, och då gäller

$$\det(sI - A + KC) = (s+4)(s+5) = s^2 + 9s + 20 = 0.$$

Eftersom $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}^T$ har vi

$$\det(sI - A + KC) = \det \begin{pmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s + 0.5 \end{pmatrix} = s^2 + (0.5 + k_1)s + 0.5k_1 + k_2 = 0,$$

vilket ger $k_1 = 8.5$ och $k_2 = 15.75$.

3. (a) Nyquistkurvan återges i figur 1. Ungefärliga skärningspunkter med axlarna ges av koordinaterna (realdel, imaginärdel): fas=0°: $(10, 0)$, fas=$-90°$: $(0, -9.5)$, fas $= -180°$: $(-3.4, 0)$, och fas=$-270°$: $(0, 0)$.

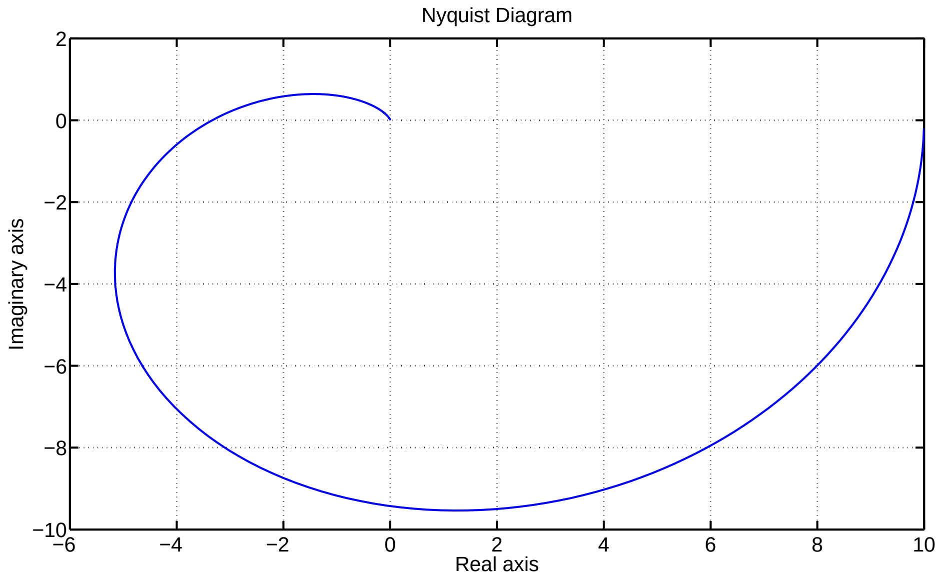
(b) Nyquistkurvan för $F(s)G(s)$ är lika med nyquistkurvan för $G(s)$ multiplicerat med 0.2. Denna kurva omsluter inte punkten -1 (skärningspunkt med negativa reella axeln vid $\approx 0.2 \cdot (-3.4) = -0.68$) och eftersom $G(s)$ är asymptotiskt stabilt är det återkopplade systemet asymptotiskt stabilt enligt nyquistkriteriet.

(c) Eftersom $\arg G(i2) \approx -210°$ behöver vi minst addera 75° för att få fasmarginal på 45°. Eftersom den fasretarderande länken vi lägger till senare sänker fasen med som mest 6° väljer vi att kompensera för detta också. Totalt vill vi alltså ha en fasavancering på 81°. Vi väljer att dela upp detta på *två* fasavancerande länkar som avancerar c:a 40.5° var. Detta ger $\beta = 0.21$. Motsvarande τ_D blir $\tau_D = 1/(2\sqrt{0.21}) \approx 1.09$. Den totala fasavancerande länken blir

$$F_{lead}(s) = K \frac{(\tau_D s + 1)^2}{(\beta \tau_D s + 1)^2}.$$

Vid skärfrekvensen ska gälla

$$|F_{lead}(i2)||G(i2)| = \frac{K}{\beta} 1.25 = 1$$



Figur 1: Nyquistkurva för $G(s)$ till uppgift 3.

varur vi ser att $K = 0.168$.
Sist lägger vi till en fasretarderande länk

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}.$$

För att inte sänka fasen vid skärfrekvensen med mer än $6°$ så väljer vi $\tau_I = 10/2 = 5$. För att välja γ så studerar vi statiska reglerfelet med hjälp av slutvärdesteoremet som är applicerbart eftersom det återkopplade systemet är stabilt enligt ovan,

$$e_0 = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1 + F_{lag}(s)F_{lead}(s)G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + 10K/\gamma} = 0.1,$$

varur vi får att $\gamma = 10K/9 \approx 0.187$.

4. (a) Vi beräknar start- och slutpunkter på rotorterna:

I. Startpunkter: $-1, -1, -1$	Slutpunkter: $-0.5, \infty, \infty$
II. Startpunkter: $-1, -1, -0.5$	Slutpunkter: ∞, ∞, ∞
III. Startpunkter: $-1, -1, -0.5$	Slutpunkter: $1, \infty, \infty$
IV. Startpunkter: $-1, -1, -0.5$	Slutpunkter: $1, 1, \infty$
V. Startpunkter: $-1, -1/\sqrt{2} \pm i/\sqrt{2}$	Slutpunkter: ∞, ∞, ∞

Vi kan nu para ihop med rotorterna i figuren och får att $B \Leftrightarrow I$, $F \Leftrightarrow II$, $C \Leftrightarrow III$, $A \Leftrightarrow IV$ och $E \Leftrightarrow V$.

(b) Om vi återkopplar $KG(s)$ i Fall III negativt får det slutna systemet överföringsfunktionen

$$G_c(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{2K(s-1)}{(s+1)^2(s/0.5+1)+2K(s-1)}.$$

Det slutna systemet är instabilt då den karakteristiska ekvationen

$$(s+1)^2(s/0.5+1) + 2K(s-1) = 2s^3 + 5s^2 + (4+2K)s + 1 - 2K = 0 \quad (1)$$

har minst en rot i högra komplexa halvplanet. Från rotort C ser vi att det återkopplade systemet är asymptotiskt stabilt för små K men att en rot till (1) kommer att korsa imaginära axeln för något $K > 0$ i punkten $s = 0$. Vi kan hitta detta värde på K genom att söka lösningar till (1) där $s = 0$. Vi får att detta K ges av

$$1 - 2K = 0 \Leftrightarrow K = 1/2.$$

Alltså är återkopplade systemet instabilt precis då $K > 1/2$.

(c) Om vi återkopplar $KG(s)$ i Fall V negativt får det slutna systemet överföringsfunktionen

$$G_c(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{K}{(s+1)(s^2+\sqrt{2}s+1)+K}.$$

Det slutna systemet oscillerar då den karakteristiska ekvationen

$$(s+1)(s^2+\sqrt{2}s+1) + K = s^3 + (1+\sqrt{2})s^2 + (1+\sqrt{2})s + 1 + K = 0$$

har rötter på den imaginära axeln. Vi kan hitta dessa rötter genom att finna de $K > 0$ som motsvarar lösningar på formen $s = i\omega$, där ω är reellt. Vi får

$$-(1+\sqrt{2})\omega^2 + 1 + K + i[-\omega^3 + (1+\sqrt{2})\omega] = 0.$$

Vi söker nu K och ω där både imaginär- och realdelen är noll.

Imaginärdelen är noll då antingen $\omega = 0$ eller $\omega = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Om vi ansätter att $\omega = 0$ så är realdelen noll då $K = -1$. Men eftersom $K > 0$ så är detta ingen giltig lösning.

Om vi istället ansätter att $\omega = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ så är realdelen noll då $K = (1+\sqrt{2})^2 - 1 = 2(1+\sqrt{2})$. Detta är en giltig lösning på imaginära axeln eftersom $K > 0$.

Alltså oscillerar det återkopplade systemet med frekvensen $\sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 1.55$ precis då $K = 2(1+\sqrt{2}) \approx 4.83$.

5. (a) Vi har att $\hat{x}_1(t) = y(t) = x_1(t)$. Alltså gäller $\tilde{x}_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t) = 0$ för alla t.

Vi har att

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_2 = \dot{z} + 2\dot{y} &= -2z - (2+a)y - 3u + 2(a-1)x_1 + 2x_2 + 2u \\ &= -2\hat{x}_2 + (2-a)\underbrace{y}_{=x_1} - 3u + 2(a-1)x_1 + 2x_2 + 2u \\ &= -2\hat{x}_2 + 2x_2 + ax_1 - u.\end{aligned}$$

Vidare har vi att

$$\begin{aligned}&\dot{\tilde{x}}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\hat{x}}_2 = -2(x_2 - \hat{x}_2) = -2\tilde{x}_2, \quad \tilde{x}_2(0) = 1 \\ &\Rightarrow \tilde{x}_2(t) = e^{-2t}.\end{aligned}$$

(b) Vi kan här applicera *separationsprincipen* eftersom skattningsfelen går mot noll oberoende av insignalen $u(t)$ (skattningsfelet är ej styrbart). För att beräkna den efterfrågade överföringsfunktionen kan vi alltså anta att

$$u = -l_1 x_1 - l_2 x_2 - r$$

och applicera på systemet. Slutna systemets dynamik ges då av

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a-1-l_1 & 1-l_2\\ a+l_1 & l_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} r(t) \\ &= \begin{pmatrix}\dfrac{-3a+1}{a-1} & \dfrac{-2}{a-1}\\ \dfrac{2a^2}{a-1} & \dfrac{a+1}{a-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} r(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} x(t).\end{aligned}$$

Överföringsfunktionen ges nu av

$$\begin{aligned}G_c(s) &= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s - \frac{-3a+1}{a-1} & \frac{2}{a-1}\\ -\frac{2a^2}{a-1} & s - \frac{a+1}{a-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2+2s+1}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s - \frac{a+1}{a-1} & \frac{-2}{a-1}\\ \frac{2a^2}{a-1} & s - \frac{-3a+1}{a-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \quad = \frac{-s+1}{s^2+2s+1}.\end{aligned}$$

(c) Regulatorn ges av

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= -2z(t) - (2+a)y(t) - 3u(t) \\ \hat{x}_1(t) &= y(t) \\ \hat{x}_2(t) &= z(t) + 2y(t) \\ u(t) &= -l_1\hat{x}_1(t) - l_2\hat{x}_2(t) - r(t) \\ &= -l_1 y(t) - l_2(z(t) + 2y(t)) - r(t)\end{aligned}$$

vilket ger regulatordynamiken

$$\dot{z}(t) = (-2 + 3l_2)z(t) + (-2 - a + 3l_1 + 6l_2)y(t) + 3r(t).$$

Regulatorn är alltså asymptotiskt stabil då

$$-2 + 3l_2 = -2 + 3\frac{a+1}{a-1} < 0 \Leftrightarrow -5 < a < 1.$$

(I själva verket kan man visa att ingen regulator som är asymptotiskt stabil kan stabilisera det giva systemet då $a > 1$.)