SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen 28 maj 2011, 09.00 - 14.00
Svar och lösningsförslag

Del A

(1) Låt $g(x, y) = f(u(x, y))$ där $u(x, y) = x^2 + xy + y^2$ och $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en två gånger deriverbar funktion för vilken det gäller att $f'(3) = 1$ och $f''(3) = 2$.

Beräkna $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$ och $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, 1)$.

Lösning: Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(u\left(x, y\right)\right)\right) = f'(u(x, y))\frac{\partial u}{\partial x} = (2x + y)f'(u(x, y))$$

och

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left((2x + y)f'(u(x, y))\right) = 2f'(u(x, y)) + (2x + y)\frac{\partial}{\partial x}f'(u(x, y))$$
$$= 2f'(u(x, y)) + (2x + y)f''(u(x, y))\frac{\partial u}{\partial x} = 2f'(u(x, y)) + (2x + y)^2 f''(u(x, y)).$$

Eftersom $u(1, 1) = 3$ och $f'(3) = 1$ och $f''(3) = 2$ får vi att

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = (2 + 1)f'(u(1, 1)) = 3f'(3) = 3$$

och

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, 1) = 2f'(u(1, 1)) + (2 + 1)^2 f''(u(1, 1)) = 2f'(3) + 9f''(3) = 20$$

Svar: $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 3$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, 1) = 20$.

---

(2) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{2y}^2 e^{x^2}\, dx\right) dy$.

(Tips: Kan man kasta om integrationsordningen?)

Lösning: Området D som bestäms av olikheterna $0 \leq y \leq 1$ och $2y \leq x \leq 2$ kan också beskrivas med olikheterna $0 \leq x \leq 2$ och $0 \leq y \leq x/2$. Därför gäller att

$$\int_0^1 \left(\int_{2y}^2 e^{x^2}\, dx\right) dy = \iint_D e^{x^2}\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{x/2} e^{x^2}\, dy\right) dx = \int_0^2 \frac{x}{2}e^{x^2}\, dx$$

Integralen i högerledet beräknas lätt, t ex med substitutionen $u = x^2$

Svar: $\dfrac{1}{4}\left(e^4 - 1\right)$.

(3) Vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av $\mathbf{F}(x,y) = (ay^2, 4xy)$.

Bestäm talet a så att $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där γ_1 är linjesegmentet från punkten $(1,0)$ till punkten $(0,1)$ och γ_2 är den del av enhetscirkeln som har samma startpunkt och samma ändpunkt som γ_1.

Beräkna också de givna kurvintegralerna för detta värde på a.

Lösning: Om fältet $\mathbf{F}$ är konservativt är det oberoende av väg, och då kommer de två givna kurvintegralerna att vara lika. Fältet är konservatitvt i varje enkelt sammanhängande område där

$$\frac{\partial}{\partial x}(4xy) = \frac{\partial}{\partial y}ay^2 \iff 4y = 2ay \iff a = 2 \qquad \text{(gäller i hela planet)}$$

Alltså är integralerna lika om (och endast om) $a = 2$.

Vi beräkar för detta värde en potential $U(x,y)$ till fältet:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2y^2 \iff U(x,y) = 2xy^2 + g(y)$$

för en godtycklig deriverbar funktion g. Vidare skall gälla att

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 4xy \iff \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2 + g(y)) = 4xy \iff g'(y) = 0 \iff g = \text{konstant}$$

Vi väljer denna konstant $= 0$ och får då $U(x,y) = 2xy^2$. Kurvintegralernas gemensamma värde ges av skillnaden i potential mellan änd- och startpunkt:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(0,1) - U(1,0) = 0 - 0 = 0$$

Svar: $a = 2$, $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

Del B

(4) Låt $f(x,y,z) = x^2y + yz^2 + z + 1$.

a) Bestäm tangentplanet till nivåytan $f(x,y,z) = 0$ i punkten $(2,0,-1)$. (2 p)

b) Avgör om det finns någon punkt på nivåytan $f(x,y,z) = 0$ där tangentplanet är parallellt med xy-planet. (2 p)

Lösning: a) $\operatorname{grad} f(2,0,-1)$ är en normalvektor till det sökta tangentplanet.

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2xy, x^2 + z^2, 2yz + 1) \implies \operatorname{grad} f(2,0,-1) = (0,5,1)$$

Alltså ges sökt tangentplan av ekvationen $0(x-2) + 5(y-0) + (z-(-1) = 0$, dvs $5y + z + 1 = 0$.

b) Vi söker en punkt (a, b, c) sådan att tangentplanet är parallellt med xy-planet. Det är ekvivalent med att tangentplanets normalvektor är av formen $(0, 0, \lambda)$. Eftersom grad $f(a, b, c)$ är en normalvektor får vi de nödvändiga villkoren

$$2ab = 0 \qquad \text{och} \qquad a^2 + c^2 = 0$$

där det senare medför att $a = c = 0$. Men i en sådan punkt skulle gälla att

$$f(a, b, c) = f(0, b, 0) = 1 \neq 0,$$

dvs det finns ingen sådan punkt (a, b, c) på ytan $f(x, y, z) = 0$

Svar: a) $5y + z + 1 = 0$ b) Det finns ingen sådan punkt.

---

(5) a) Antag att K är en kropp med variabel densitet $\rho(x, y, z)$ [massenhet/volymsenhet]. Motivera varför Ks totala massa m då ges av

$$m = \iiint_K \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

(1 p)

b) Beräkna massan av en kropp K som begränsas av planen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 1$ samt $1 + x + y - z = 0$, och vars densitet ges av $\rho(x, y, z) = 2x + 1$.

(3 p)

Lösning: a) Kropppen K kan approximeras med (stort) antal (små) disjunkta rektangulära block. På ett sådant lite block, innehållande en punkt (x_i, y_i, z_i), och med sidlängder $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ kan vi betrakta densiteten som approximativt kontanstant om Δx_i, Δy_i och Δz_i är tillräckligt små. Detta lilla block har då massa

$$\Delta m_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i.$$

Approximativ total massa fås genom summering av alla delblockens massor

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i.$$

Denna summa är en Riemannsumma till integralen $\iiint_K \rho(x, y, z)\, dxdydz$. Succesivt finare indelningar ger bättre approxiamtioner till massan, samtidigt som motsvarande Riemannsummor då konvergerar mot $\iiint_K \rho(x, y, z)\, dxdydz$.

b) Kroppen K ligger över enhetskvadraten $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ i xy-planet, och över denna kvadrat varierar z enligt $1 \leq z \leq 1 + x + y$. Vi får

$$\iiint_K \rho(x, y, z)\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^1 \int_1^{1+x+y} 2x + 1\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 (2x + 1) \int_0^1 (x + y + 1 - 1)\, dy\, dx = \int_0^1 (2x + 1)[xy + y^2/2]_0^1\, dx$$

$$= \int_0^1 (2x + 1)(x + 1/2)\, dx = \int_0^1 2x^2 + 2x + 1/2\, dx = \frac{13}{6}$$

Svar: b) $\dfrac{13}{6}$ massenheter

---

(6) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (3x, 2y, z)$ ut ur kroppen $\mathbf{K}$ som definieras av olikheterna $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ och $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Lösning: Vi använder Gauss' sats (Divergenssatsen). Låt Φ beteckna flödet genom K. Från

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 3 + 2 + 1 = 6,$$

får vi

$$\Phi = \iiint_K 6\, dxdydz$$

Lägg märke till att kroppen $\mathbf{K}$ består av de punkter i rummet som ligger mellan två sfärer och en konisk yta. För att beräkna integralen använder vi sfäriska koordinater: $x = R \sin\theta \cos\phi$, $y = R \sin\theta \sin\phi$, $z = R\cos\theta$ och använder att $dxdydz = R^2 \sin\theta\, d\phi d\theta dR$ och får

$$\Phi = \iiint_K 6dxdydz = 6 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^2 R^2 \sin\theta\, dR = 6 \cdot 2\pi(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot \frac{7}{3} = 14\pi(2 - \sqrt{2})$$

Svar: $28\pi - 14\pi\sqrt{2}$

Del C

(7) Vilka värden antar funktionen $f(x, y, z) = xy\sqrt{z}$ på ytstycket $x + y + z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Lösning: Eftersom f är en kontinuerlig funktionen definierad på ett kompakt område antar f ett största och ett minsta värde. Eftersom f är kontinuerlig och området sammanhängande kommer f också att anta alla värden mellan sitt största och sitt minsta värde. Största och minsta värde antas antingen i det inre av ytstycket, eller på dess rand.

Eftersom ytstyckets rand ligger i koordinatplanen där en av variablerna är $= 0$ är $f = 0$ på hela randen.

Kandidater till punkter som ger största eller minsta värde i det inre av ytstycket bestämmer vi med Lagranges multiplikatormetod. Låt $g(x, y, z) = x + y + z$.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y\sqrt{z} = \lambda \\ x\sqrt{z} = \lambda \\ \dfrac{xy}{2\sqrt{z}} = \lambda \\ x + y + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y = 2z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2/5 \\ y = 2/5 \\ z = 1/5 \end{cases}$$

Det följer att största värde är $f(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}) = \frac{4}{25\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{125}$ och minsta värde är 0.

Svar: f antar alla värden i intervallet $\left[0, \dfrac{4\sqrt{5}}{125}\right]$.

---

(8) Låt S vara det ytstycke som ges av parameteriseringen

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v \end{cases}, \quad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 2\pi.$$

a) Beskriv ytan S med ord och en enkel figur. (1 p)

b) Beräkna ytintegralen $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\, dS$. (3 p)

Lösning: a) Ytan blir en spiralformad ramp, uppbyggd av strålar parallella med xy-planet, som vrider sig ett varv kring z-axeln från nivån $z = 0$ till nivån $z = 2\pi$. Se exempel 9 sid 309 och 310 i i Persson-Böjers: Flervariabelanalys, där halva denna yta finns illustrerad.

b) Ortsvektorn för en punkt på ytan ges av

$$\mathbf{r} = (u\cos v, u\sin v, v).$$

Därför är

$$\mathbf{r}'_u = (\cos v, \sin v, 0) \qquad \text{och} \qquad \mathbf{r}'_v = (-u\sin v, u\cos v, 1) \implies \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (\sin v, -\cos v, u).$$

Ytelementet $dS = ||\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v||dudv = \sqrt{1+u^2}\, dudv$. Vi observerar också att integranden $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v} = |u| = u$, där den sista likheten följer av att $u \ge 0$. Alltså får vi

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\, dS = \iint_{0\le u\le 1, 0\le v\le 2\pi} u\sqrt{1+u^2}\, dudv = 2\pi \int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\, du = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Svar: $\dfrac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$

---

(9) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

a) Definiera vad det betyder att f är kontinuerlig i punkten $(0,0)$. (1 p)

b) Låt f vara given av

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2}, & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ k, & \text{då } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bestäm konstanten k så att f blir kontinuerlig i origo. (3 p)

Lösning: a) Funktionen f är kontinuerlig i $(0,0)$ om och endast om gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar och

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2-(r^3\cos^3\phi)(r^3\sin^3\phi)}{r^2}$$
$$= \lim_{r\to 0}(1-r^4B(\phi)) = 1$$

Här har vi butt till polära koordinater, och sedan uttnyttjat att $B(\phi) = \cos^3\phi\sin^3\phi$ är en begränsad funktion $-1 \le B \le 1$. Alltså ska vi välja $k=1$ för att f ska vara kontinuerlig i $(0,0)$.

Svar: b) $k = 1$.