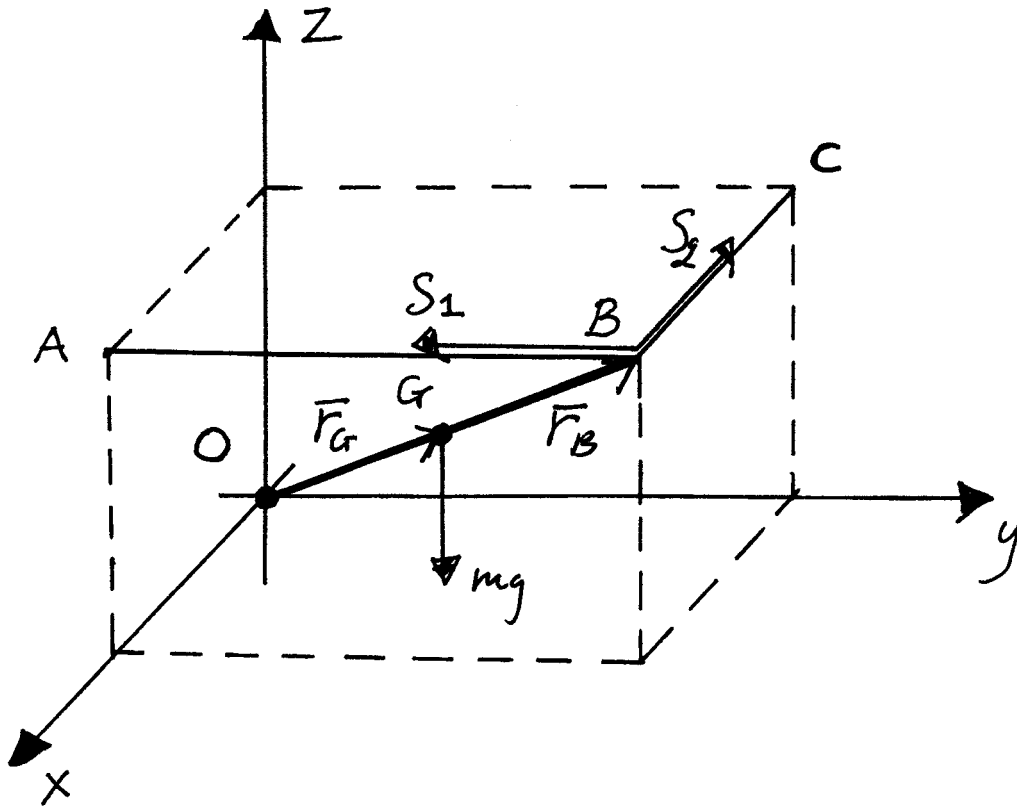


Lösningar till tentamen, SG1109, 29/5, 2012

1.



$$\mathbf{r}_B = (a, b, c), \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{2}\mathbf{r}_B, \quad \mathbf{S}_1 = -S_1\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{S}_2 = -S_2\mathbf{e}_x. \quad (1)$$

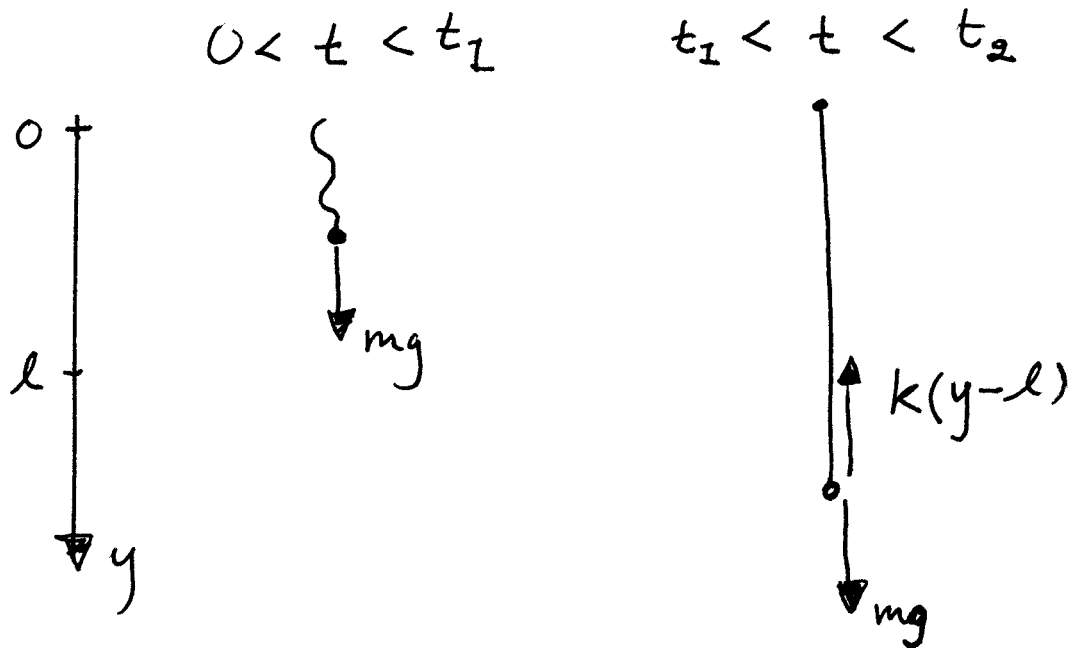
Jämvikt innebär att $\mathbf{M}_0 = \mathbf{0} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \mathbf{r}_G \times (-mg\mathbf{e}_z) + \mathbf{r}_B \times (-S_1\mathbf{e}_y - S_2\mathbf{e}_x) = \\ &= (a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z) \times (-S_2\mathbf{e}_x - S_1\mathbf{e}_y - \frac{1}{2}mg\mathbf{e}_z) = \\ &= (cS_1 - \frac{1}{2}bmg)\mathbf{e}_x + (-cS_2 + \frac{1}{2}amg)\mathbf{e}_y + (bS_2 - aS_1)\mathbf{e}_z = \mathbf{0} \Rightarrow \end{aligned} \quad (2)$$

$$S_1 = \frac{bmg}{2c}, \quad (3)$$

$$S_2 = \frac{amg}{2c}. \quad (4)$$

2.



Under det första tidsintervallet gäller

$$m\ddot{y} = mg \Rightarrow \ddot{y} = g. \quad (5)$$

Om vi integrerar två gånger med begynnelsevillkoren $y = 0$, $\dot{y} = 0$ då $t = 0$, får vi

$$y = \frac{1}{2}gt^2, \quad (6)$$

vilket ger läget y som funktion av tiden t då $0 < t < t_1$, där $t_1 = \sqrt{2l/g}$. Under det andra tidsintervallet gäller att

$$m\ddot{y} = -k(y - l) + mg \Rightarrow \ddot{y} + \omega_n^2 y = g + \omega_n^2 l, \quad (7)$$

där $\omega_n = \sqrt{k/m}$. Lösningen kan skrivas som $y = y_p + y_h$, där

$$y_p = l + \frac{g}{\omega_n^2}, \quad (8)$$

$$y_h = A \sin(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t), \quad (9)$$

vilket ger

$$y = l + \frac{g}{\omega_n^2} + A \sin(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t). \quad (10)$$

Konstanterna A och B bestäms nu från begynnelsevillkoren

$$y = l, \dot{y} = \sqrt{2gl} \text{ då } t = t_1 = \sqrt{2l/g}. \quad (11)$$

Vi får ekvationssystemet

$$l = l + \frac{g}{\omega_n^2} + A \sin(\omega_n t_1) + B \cos(\omega_n t_1) \quad (12)$$

$$\sqrt{2gl} = A\omega_n \cos(\omega_n t_1) - B\omega_n \sin(\omega_n t_1). \quad (13)$$

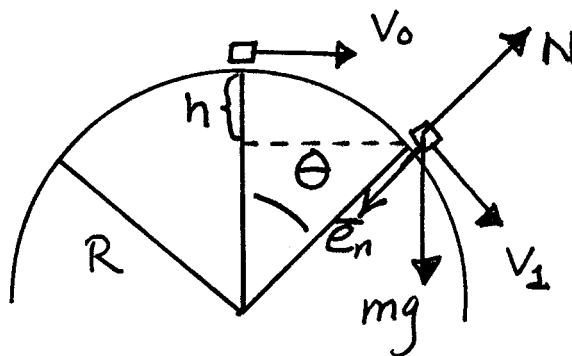
med lösningen

$$A = -\frac{g}{\omega_n^2} \sin(\omega_n t_1) + \frac{\sqrt{2gl}}{\omega_n} \cos(\omega_n t_1), \quad (14)$$

$$B = -\frac{g}{\omega_n^2} \cos(\omega_n t_1) - \frac{\sqrt{2gl}}{\omega_n} \sin(\omega_n t_1). \quad (15)$$

I tidsintervallet $t_1 < t < t_2$ ges alltså lösningen av (10) där A och B ges av (14) och (15).

3.



Energiprincipen ger att

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 + 2gh \quad (16)$$

Ur figuren fås

$$h + R \cos \theta = R \Rightarrow h = R(1 - \cos \theta). \quad (17)$$

Om vi sätter in (17) i (16) så får vi

$$v_1^2 = v_0^2 + 2gR(1 - \cos \theta). \quad (18)$$

Newtons andra lag tillämpad i e_n -led ger

$$m \frac{v_1^2}{R} = mg \cos \theta - N \Rightarrow N = mg \cos \theta - m \frac{v_1^2}{R}. \quad (19)$$

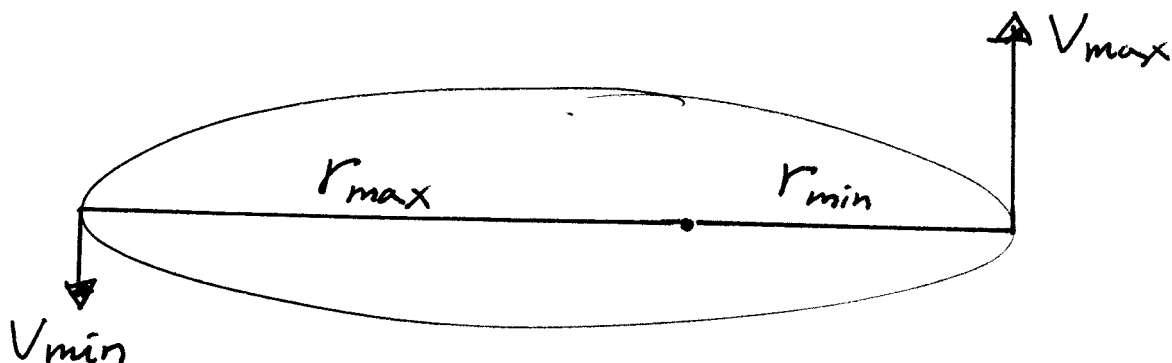
Ekvation (18) och (19) ger nu

$$N = mg(3 \cos \theta - 2) - \frac{mv_0^2}{R}. \quad (20)$$

Vagnen tappar kontakten med banan då N är noll. För vinkeln θ får vi då

$$\cos \theta = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{gR} \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right). \quad (21)$$

4.



a) I centralrörelse gäller att

$$\dot{\theta}r^2 = h, \quad (22)$$

där h är en rörelsekonstant (dubbla sektorshastigheten). Alltså fås

$$\dot{\theta}_{max} = \frac{h}{r_{min}^2}, \quad (23)$$

$$\dot{\theta}_{min} = \frac{h}{r_{max}^2}. \quad (24)$$

Detta ger

$$\frac{r_{max}}{r_{min}} = \left(\frac{\dot{\theta}_{max}}{\dot{\theta}_{min}} \right)^{1/2} = \sqrt{2}. \quad (25)$$

Ellipsens bana beskrivs av ekvationen

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}, \quad (26)$$

vilket ger

$$r_{max} = r(\pi) = a(1 + e), \quad (27)$$

$$r_{min} = r(0) = a(1 - e). \quad (28)$$

Ekvation (25), (27) och (28) ger nu

$$\frac{1 + e}{1 - e} = \sqrt{2} \Rightarrow e(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow e = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}. \quad (29)$$

b) Enligt figuren fås

$$v_{max} = \dot{\theta}_{max} r_{min} \quad (30)$$

$$v_{min} = \dot{\theta}_{min} r_{max}. \quad (31)$$

Alltså fås

$$\frac{T_{max}}{T_{min}} = \frac{v_{max}^2}{v_{min}^2} = \left(\frac{\dot{\theta}_{max} r_{min}}{\dot{\theta}_{min} r_{max}} \right)^2 = 2, \quad (32)$$

där vi har använt (25).

c) Den potentiella energin kan skrivas

$$V = -G \frac{mM}{r}. \quad (33)$$

Alltså fås

$$V_{max} = -G \frac{mM}{r_{max}}, \quad (34)$$

$$V_{min} = -\frac{mM}{r_{min}}, \quad (35)$$

och

$$\frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{r_{max}}{r_{min}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (36)$$

där vi har använt (25).

Toeridel

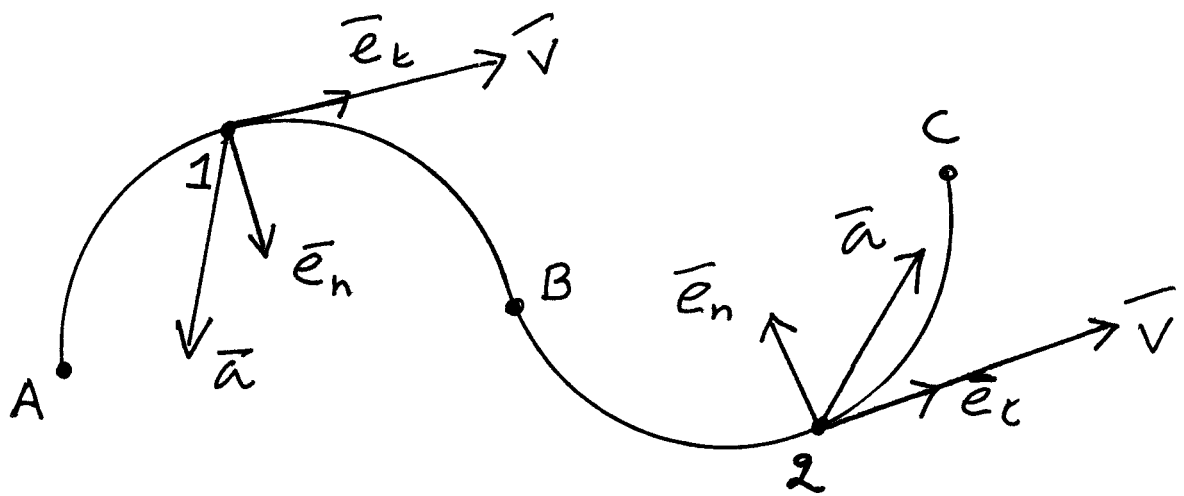
1 a) Se sid. 33 i boken!

b) Se sid. 46 i boken!

c) Se sid. 47 i boken!

2 a) Se sid. 146-148 i boken!

b)



3a)

4a) Se sid. 328 i boken!

b) Se mina föreläsninganteckningar som finns på KTH-Social!

c) Enligt Keplers tredje lag har vi $\tau = Ca^{3/2}$. Alltså fås att

$$\frac{r_x}{r_j} = \left(\frac{\tau_x}{\tau_j} \right)^{2/3}, \quad (37)$$

där r_x är planetens avstånd till solen, r_j jordens avstånd till solen och $\tau_j = 1$ år, jordens omloppstid.