



KTH Elektro-  
och systemteknik

**Tentamen i EG2050 Systemplanering,  
14 mars 2013, 8:00–13:00, E31, E32, E35, E36, E51, E52**

**Tillåtna hjälpmedel**

Vid denna tentamen får följande hjälpmedel användas:

- Miniräknare utan information med anknytning till kursen.
- En **handskriven, enkelsidig** A4-sida med **egna** anteckningar (original, ej kopia).  
Denna sida skall lämnas in tillsammans med svarsbladet.

## DEL I (OBLIGATORISK)

Skriv alla svar på det bifogade svarsbladet. Några motiveringar eller beräkningar behöver inte redovisas.

Del I kan totalt ge 40 poäng. Godkänt betyg garanteras vid 33 poäng. Om resultatet på del I uppgår till minst 31 poäng ges möjlighet att vid en extra skrivning komplettera till godkänt betyg (E).

### Uppgift 1 (4 p)

Besvara följande teorifrågor genom att välja *ett* alternativ, som du anser är korrekt.

**a) (2 p)** AB Elbolaget är en balansansvarig elleverantör. Elhandeln på den marknad där AB Elbolaget i verksam har en handelsperiod på en timme. AB Elbolaget har en enda kund, nämligen AB Industri. Antag att AB Industris förbrukning varierar mellan 800 MW och 1 250 MW med ett medelvärde på 1 000 MW under timmen. I vilka av följande situationer uppfyller AB Elbolaget sitt balansansvar utan någon obalans: I) Då AB Elbolagets totala produktion varierar mellan 800 MW och 1 250 MW med ett medelvärde på 980 MW under timmen, II) Då AB Elbolaget köper 500 MWh från den lokala elbörsen ElKräng samt producerar 400 MW under den första halvtimmen och 600 MW under den andra halvtimmen, III) Då AB Elbolaget köper 1 250 MWh från ElKräng.

1. Inget av påståendena är sant.
2. Endast II är sant.
3. I och II är sanna men inte III.
4. II och III är sanna men inte I.
5. Alla påståendena är sanna.

**b) (2 p)** På en bilateral elmarknad gäller att I) Producenterna är fria att sälja till vilka andra producenter, återförsäljare och konsumenter som helst, II) All elhandel måste ske via en elbör, III) Konsumenterna är fria att köpa från vilken producent eller återförsäljare som helst.

1. Inget av påståendena är sanna.
2. Endast I är sant.
3. Endast II är sant.
4. Endast III är sant.
5. I och III är sanna men inte II.

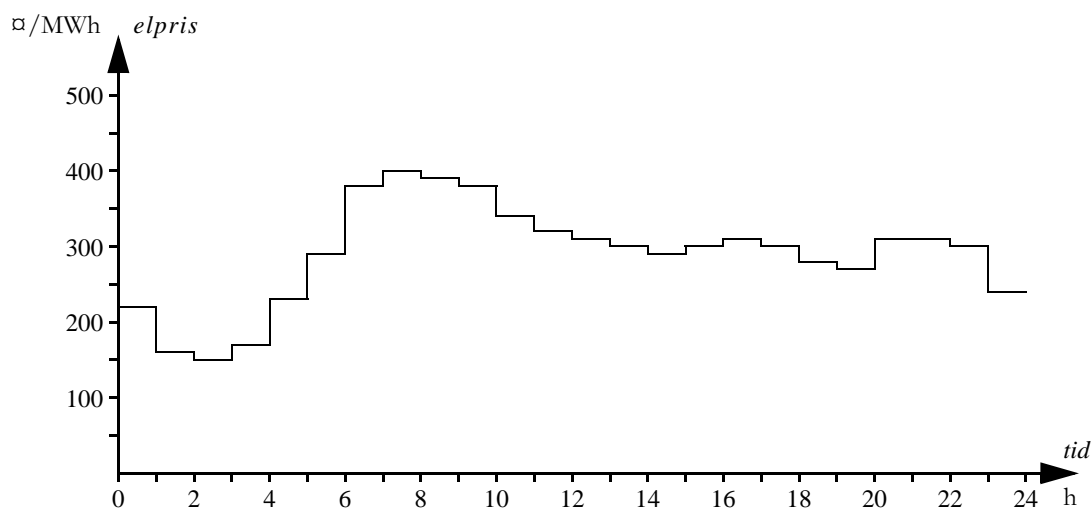
## Uppgift 2 (6 p)

Antag att man på elmarknaden i Land har perfekt konkurrens, alla aktörer har perfekt information, samt att det inte finns några nät- eller effektbegränsningar. Vattenmagasinen i Land har en maximal lagringskapacitet på 40 TWh. Den 1 januari innehåller vattenmagasinen totalt 20 TWh och enligt långtidsprognoserna för elmarknaden (vilka som sagt var antas vara felfria) ska magasinen innehålla 25 TWh den 31 december. Tillrinningen är 50 TWh mellan 1 januari och den 30 juni, samt 20 TWh mellan 1 juli och 31 december. Den rörliga produktionskostnaden i vattenkraften är försumbar.

**a) (2 p)** Antag att elpriset är 360  $\text{kr}/\text{MWh}$  mellan 1 januari och den 30 juni och 380  $\text{kr}/\text{MWh}$  mellan 1 juli och 31 december. Hur mycket innehåller vattenmagasinen på kvällen den 30 juni?

**b) (1 p)** Hur stor är den sammanlagda vattenkraftproduktionen mellan den 1 januari och den 30 juni?

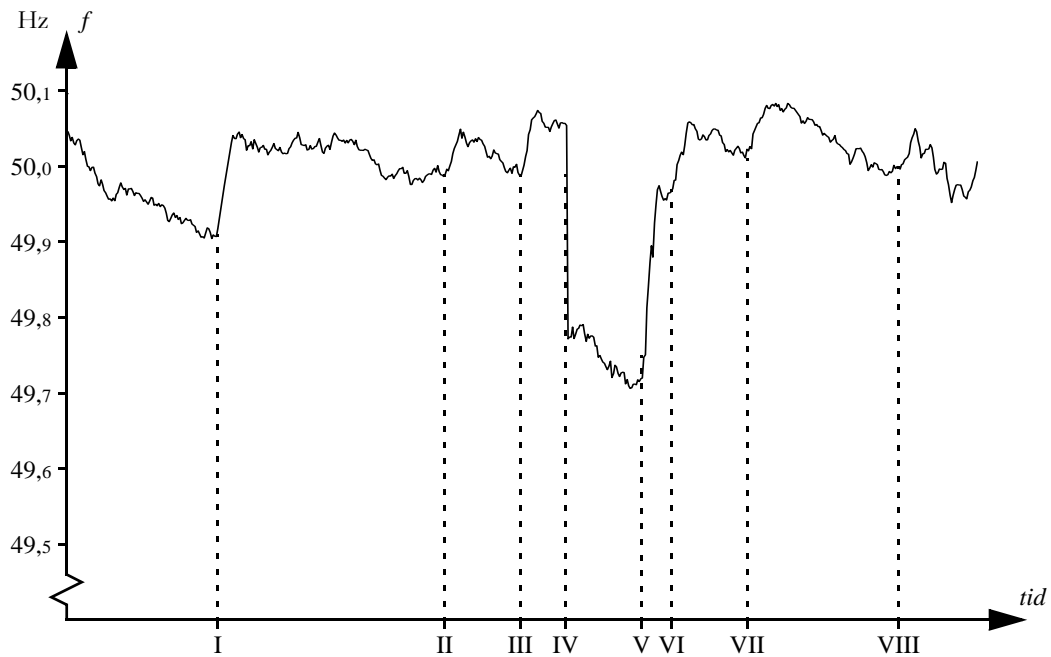
**c) (3 p)** Figuren nedan visar elpriset i Rike under ett dygn. Antag att det i Rike råder perfekt konkurrens på elmarknaden och att alla aktörer har perfekt information. Hur mycket producerar ett kraftverk med driftkostnaden 350  $\text{kr}/\text{MWh}$  under detta dygn, om den installerade effekten i kraftverket är 100 MW?



### Uppgift 3 (6 p)

Primärregleringen i Land är uppdelad i en normaldriftreserv och en störningsreserv. Normaldriftreserven har reglerstyrkan 2 000 MW/Hz och är till för att hantera normala variationer i t.ex. last och vindkraftproduktion. Störningsreserven har reglerstyrkan 1 500 MW/Hz och är till för att hantera bortfall i större kraftverk. Normaldriftreserven är tillgänglig i frekvensintervallet 49,9–50,1 Hz och störningsreserven är tillgänglig i frekvensintervallet 49,5–49,9 Hz.

Figuren nedan visar frekvensen i elsystemet i Land under en timme. Vid åtta tillfällen under denna timme (markerade med de romerska siffrorna I till VIII i tidsskalan) inträffar större frekvensändringar, som inte beror på de normala variationerna i last och vindkraftproduktion. Nedan beskrivs tre av de händelser som orsakar dessa frekvensändringar. Ange vid vilken tidpunkt (I–VIII) respektive händelse inträffar.



- a) (2 p)** På grund av överslag i en transformator tappar systemet 500 MW produktion.
- b) (2 p)** Ett kraftverk ökar produktionen med 250 MW efter att systemoperatören aktiverat ett uppregeringsbud.
- c) (2 p)** Överföringen på en HVDC-ledning till ett annat synkront system minskar linjärt under en femminutersperiod från en export på 500 MW till att ledningen inte överför någonting alls. Samtidigt som exporten på denna förbindelse dras ned så minskar elproduktionen i systemet med 100 MW en gång per minut.

## Uppgift 4 (12 p)

Stads energi AB äger ett termiskt kraftverk med fyra block. Dessutom äger man en vindkraftpark. Antag att bolaget formulerat sitt korttidsplaneringsproblem som ett MILP-problem och att man har infört följande beteckningar:

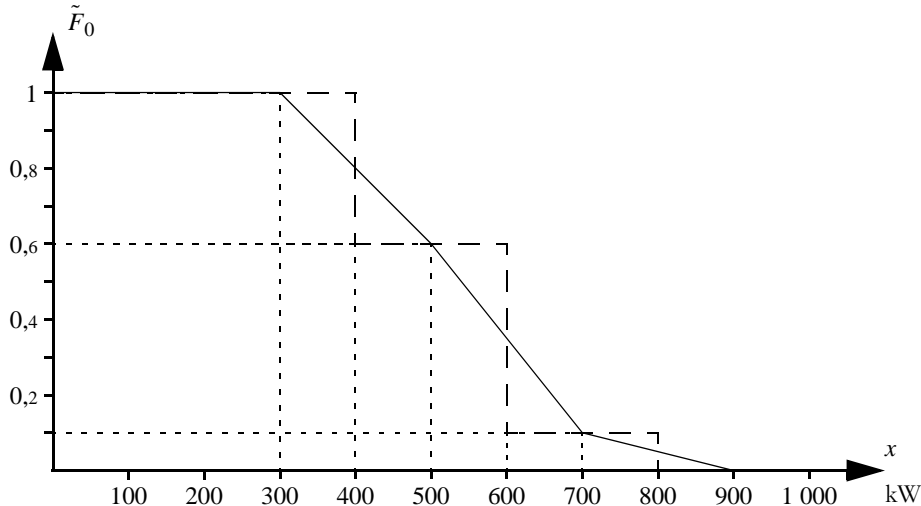
Index för kraftverken: Block I - 1, Block II - 2, Block III - 3, Block IV - 4.

$$\begin{aligned}\beta_{Gg} &= \text{rörlig produktionskostnad i kraftverk } g, \\ C_g^+ &= \text{startkostnad i kraftverk } g, g = 1, \dots, 4, \\ G_{g,t} &= \text{elproduktion i kraftverk } g, \text{ timme } t, g = 1, \dots, 4, t = 1, \dots, 24, \\ \bar{G}_g &= \text{installerad effekt i kraftverk } g, g = 1, \dots, 4, \\ \underline{G}_g &= \text{minimal elproduktion då kraftverk } g \text{ är i drift, } g = 1, \dots, 4, \\ \lambda_t &= \text{förväntat elpris timme } t, t = 1, \dots, 24, \\ s_{g,t}^+ &= \text{startvariabel för kraftverk } g, \text{ timme } t, g = 1, \dots, 4, t = 1, \dots, 24, \\ u_{g,0} &= \text{driftstatus i kraftverk } g \text{ vid planeringsperiodens början, } g = 1, \dots, 4, \\ u_{g,t} &= \text{driftstatus i kraftverk } g, \text{ timme } t, g = 1, \dots, 4, t = 1, \dots, 24, \\ W_t &= \text{förväntad vindkraftproduktion timme } t, t = 1, \dots, 24.\end{aligned}$$

- a) (3 p)** Vilka av beteckningarna ovan representerar optimeringsvariabler respektive parametrar?
- b) (4 p)** Stads energi AB säljer el på den lokala börsen ElKräng. Formulera målfunktionen i bolagets planeringsproblem om syftet med planeringen är att maximera intäkterna från el såld minus kostnaderna i det termiska kraftverket. Använd beteckningarna ovan.
- c) (4 p)** Formulera det bivillkor som reglerar sambandet mellan  $u_{g,t}$ ,  $u_{g,t-1}$  och  $s_{g,t}^+$  för kraftverk  $g$ , timme  $t$ . Observera att bivillkoret ska formuleras utan hjälp av några ytterligare optimeringsvariabler än de som definierats ovan!
- d) (1 p)** Magasinet till vattenkraftverket Ån innehåller 2 000 TE klockan 10:00. Den lokala tillrinningen samt tappning och spill från kraftverket närmast uppströms uppgår till  $150 \text{ m}^3/\text{s}$  mellan 10:00 och 11:00. Under samma tid tappar man 160 TE från Ån. Hur mycket innehåller Åns vattenmagasin klockan 11:00? Observera att svaret ska ges i  $\text{m}^3$ !

## Uppgift 5 (12 p)

Akabuga är en stad i Östafrika. Staden är inte ansluten till något nationellt elnät, men ett antal lokala affärsmän överväger att starta ett lokalt elbolag, Akabuga Electricity Company Ltd. (AECL). Ett av de alternativ som övervägs för AECL är att försörja systemet med ett vindkraftverk och fyra dieselgeneratorer. En förenklad modell av vindkraftverket ges i tabell 1. Dieselgeneratorerna skulle få en kapacitet på 200 kW vardera, tillgänglighet 90% och driftkostnad 0,5 ₣/ kWh. Figuren nedan visar en varaktighetskurva för lasten i Akabuga (heldragen linje) samt en approximation av samma varaktighetskurva (streckad linje).



**Tabell 1** Modell av vindkraftverket i uppgift 5.

Tillgänglig produktionskapacitet [kW]	Sannolikhet [%]
0	25
100	35
200	30
300	10

- a) (1 p)** Utgå från den approximativa varaktighetskurvan för lasten och beräkna varaktighetskurvan för den ekvivalenta lasten inklusive bortfall i vindkraftverket,  $\tilde{F}_1(x)$ , för intervallet  $400 \leq x < 500$ .
- b) (1 p)** Utgå från den approximativa varaktighetskurvan för lasten och beräkna varaktighetskurvan för den ekvivalenta lasten inklusive bortfall i vindkraftverket,  $\tilde{F}_1(x)$ , för intervallet  $500 \leq x < 600$ .
- c) (1 p)** Utgå från den approximativa varaktighetskurvan för lasten och beräkna varaktighetskurvan för den ekvivalenta lasten inklusive bortfall i vindkraftverket,  $\tilde{F}_1(x)$ , för intervallet  $600 \leq x < 700$ .
- d) (3 p)** I tabell 2 visas några resultat från en stokastisk produktionskostnadssimulering av elsystemet i Akabuga. Använd dessa resultat för att beräkna den förväntade driftkostnaden per timme.
- e) (2 p)** Ta fram ett värde på lasten med hjälp av den inversa transformmetoden och slumptalet 0,2 från en  $U(0, 1)$ -fördelning. (Använd den exakta varaktighetskurvan i denna uppgift!)

**Tabell 2** Resultat från en stokastisk produktionskostnadssimulering av det planerade elsystemet i Akabuga.

	$x = 0$	$x = 300$	$x = 400$	$x = 500$	$x = 600$	$x = 700$	$x = 800$	$x = 900$	$x = 1\ 000$	$x = 1\ 100$
$\int_x^{\infty} \tilde{F}_1(\xi) d\xi$	715	415	316	222	140	76	35	12	3	1
$\int_x^{\infty} \tilde{F}_2(\xi) d\xi$	735	435	336	241	157	91	45	19	7	2
$\int_x^{\infty} \tilde{F}_3(\xi) d\xi$	755	455	356	261	175	106	56	26	10	3
$\int_x^{\infty} \tilde{F}_4(\xi) d\xi$	775	475	376	280	193	121	68	34	15	6
$\int_x^{\infty} \tilde{F}_5(\xi) d\xi$	795	495	396	300	212	137	81	43	20	9

**f) (4 p)** Det planerade elsystemet i Akabuga har även simulerats med Monte Carlo-teknik. Den modell som använts i Monte Carlo-simuleringen är något mer avancerad än den modell som används i en stokastisk produktionskostnadssimulering, och tar bl.a. hänsyn till att en del konsumenter är priskänsliga. För att få ett noggrant resultat från Monte Carlo-simuleringen har man valt att använda stratifierad sampling.

Resultaten från de femton första scenarierna i Monte Carlo-simuleringen finns sammanställda i tabell 3. Vilka skattningar av *ETOC* och *LOLP* får man utifrån dessa resultat?

**Tabell 3** Resultat från en Monte Carlo-simulering av det planerade elsystemet i Akabuga.

Stratum	Stratumvikt	Observationer av <i>TOC</i> [¤/h]	Observationer av <i>LOLO</i>
1	0,900	185, 175, 240, 230, 370	0, 0, 0, 0, 0
2	0,025	290, 290, 300, 390, 290	0, 0, 1, 0, 0
3	0,075	300, 400, 300, 300, 200	1, 1, 1, 1, 1

## DEL II (FÖR HÖGRE BETYG ÄN GODKÄNT)

Alla beteckningar som införs skall förklaras. Lösningarna skall vara så utförliga att det utan problem går att följa tanke- och beräkningsgången.

Svaren på de olika uppgifterna skall lämnas in på olika blad, men svar på deluppgifter (a, b, c, o.s.v) kan skrivas på samma blad. Fälten *Namn*, *Blad nr* och *Uppgift nr* skall fyllas i på varje blad.

Del II kan ge totalt 60 poäng. Del II kommer endast att rättas om tentanden erhållit minst 33 poäng på del I. Om så är fallet summeras resultatet på del I, del II och bonuspoängen. Denna summa ligger till grund för vilket betyg (A, B, C, D, E) som ges på tentamen.

### Uppgift 6 (10 p)

I Land planerar bolaget AB Industriel att bygga ett nytt kärnkraftverk på 1 000 MW. Med anledning av detta har miljöorganisationen Grönfrid (som är välbekanta motståndare till kärnkraft) publicerat en kritisk rapport. I sammanfattningen till denna rapport kan man läsa följande resonemang:

“AB Industriel har slutit kontrakt med Kärnkraftbyggarna AB om att uppföra en ny kärnkraftreaktor i Strålinge. Enligt offentliga uppgifter från bolagen ska kärnkraftverket byggas till ett fast pris på 30 miljarder  $\text{€}$ . Med en avskrivningstid på 15 år och en kalkylränta på 5% ger detta en årlig kapitalkostnad på ungefär 3 miljarder  $\text{€}$ . Detta ska jämföras med att genomsnittspriset på EIKräng de senaste åren har legat på ungefär 300  $\text{€}/\text{MWh}$  och att den rörliga produktionskostnaden i ett kärnkraftverk av den typ som planeras ligger på ungefär 100  $\text{€}/\text{MWh}$ . En årsproduktion på 8 TWh skulle således ge en nettoinkomst på 1,6 miljarder  $\text{€}$  per år. Förutom problemen med avfallet och risken för härdsmälta så är en reaktor i Strålinge alltså en ren förlustaffär, som inte ens är lönsam med statliga subventioner för den nödvändiga nätutbyggnaden och att staten står för kostnaderna i händelserna av en kärnkraftolycka.”

VD för AB Industriel har kort kommenterat Grönfrids rapport med orden “Först och främst vill jag påpeka att vi naturligtvis följer alla miljöregler och de krav som ställs på oss från Lands strålskyddsmyndighet. Vad gäller lönsamheten så ägs AB Industriel av stora aktörer inom Lands näringsliv och vi skulle inte göra en så stor investering om vi inte trodde på den.”

Ta hjälp av statistiken på nästa sida och gör en egen analys av huruvida kärnkraftverket i Strålinge är lönsamt eller inte.

OBS! Det som bedöms i denna uppgift är inte slutsatsen om kärnkraftverkets lönsamhet utan hur väl du kan resonera kring och värdera de uppgifter som förs fram.

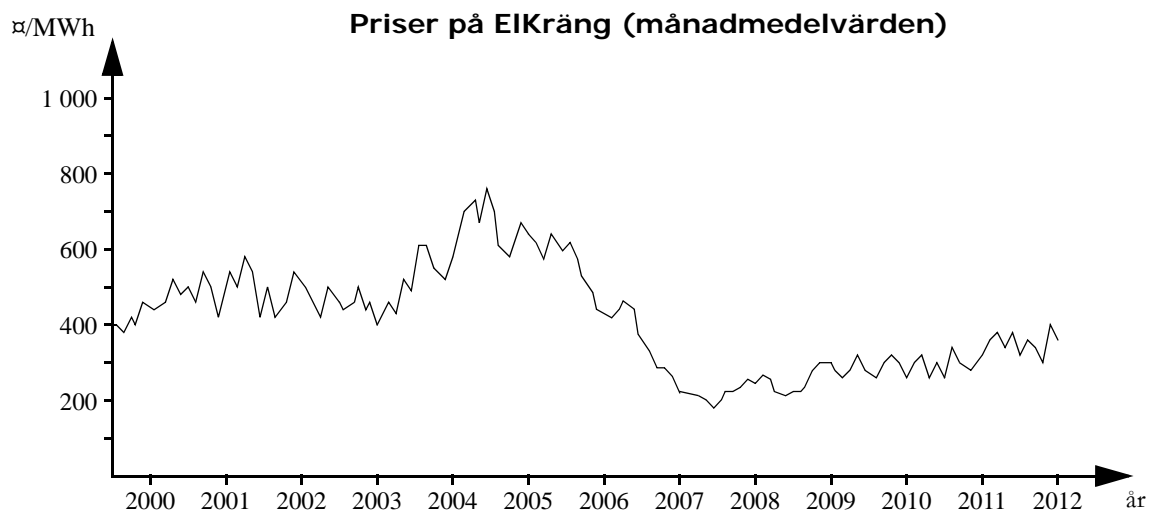
*Tips:* Årliga investeringskostnader kan beräknas med annuitetsformeln:

$$AC = I \cdot \frac{r/100}{1 - (1 + r/100)^{-n}}$$

där

- $AC$  = årlig kostnad [ $\text{€}$ ],
- $I$  = investeringskostnad [ $\text{€}$ ],
- $r$  = kalkylränta [%],
- $n$  = avskrivningstid [år].





## Uppgift 7 (10 p)

Betrakta ett elsystem bestående av de tre länderna Åland, Beland och Celand. Data för transmissionsförbindelserna mellan länderna ges i tabell 5. Varje förbindelse är försedd med ett skyddssystem som efter en viss tidsfördröjning automatiskt kopplar bort förbindelsen om flödet skulle överstiga den maximala kapaciteten. Effektflödena på HVDC-förbindelsen påverkas inte av frekvensen i systemet, utan kan bara kontrolleras manuellt.

Primärregleringen i de tre länderna är uppdelad i en normaldriftreserv och en störningsreserv, där den senare är till för att hantera bortfall i större kraftverk. Fördelningen av reglerstyrkorna för störningsreserven framgår av tabell 4. I tabellen anges också det dimensionerande felet för varje area, d.v.s. det största det största enskilda bortfall som kan uppstå (under förutsättning att man inte samtidigt förlorar produktionen i flera kraftverk). Kravet på elsystemet är att man ska klara att ett dimensionerande fel inträffar i något av länderna då frekvensen är 49,9 Hz, utan att frekvensen sjunker lägre än 49,5 Hz och utan att någon transmissionsledning blir överbelastad.

Kontrollera om systemet i den situation som beskrivs i tabell 5 uppfyller kraven då ett dimensionerande fel inträffar. Om så inte är fallet, vad kan man då vidta för snabba åtgärder för att säkerställa att kraven uppfylls?

*Tips:* Observera att man alltså inte behöver klara att ett dimensionerande fel skulle inträffa samtidigt i två länder eller alla tre länder; det räcker om systemet klarar ett dimensionerande fel i *ett* land!

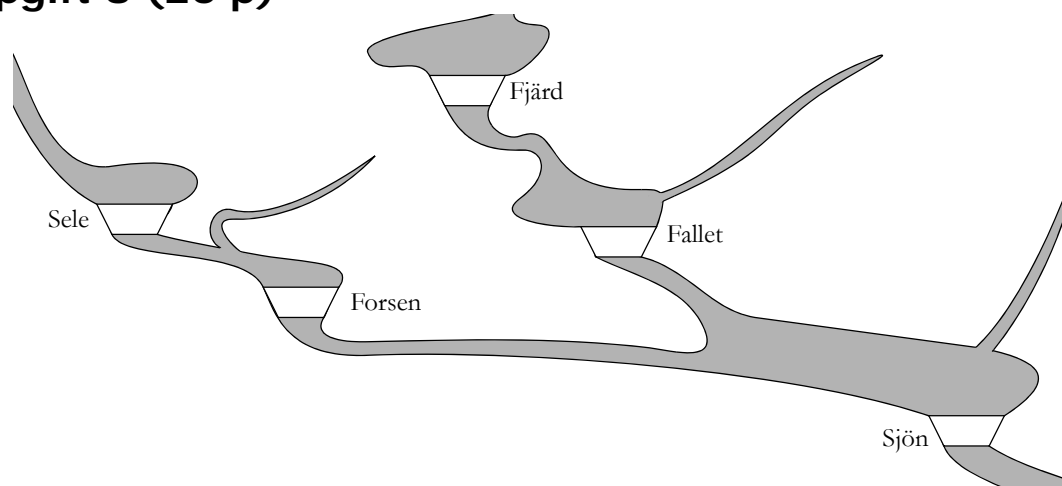
**Tabell 4** Fördelning av reglerstyrkan.

Land	Störningsreserv (tillgänglig mellan 49,5 och 49,9 Hz) [MW/Hz]	Dimensionerande fel [MW]
Aland	1 000	1 200
Beland	1 500	600
Celand	500	900

**Tabell 5** Data för transmissionsförbindelserna.

Förbindelse	Typ	Transmission då frekvensen i systemet är 49,9 Hz [MW]	Maximal kapacitet [MW]
Aland ↔ Beland	Likström (HVDC)	400 MW från Beland till Aland	600
Aland ↔ Celand	Växelström	1 000 MW från Aland till Celand	2 000
Beland ↔ Celand	Växelström	2 000 MW från Beland till Celand	2 500

## Uppgift 8 (20 p)



Obygdens kraft AB äger fem mindre vattenkraftverk lokaliserade enligt figuren ovan. Bolaget har inte investerat i en modern driftcentral, utan kraftverken regleras fortfarande manuellt. Detta innebär att man för att ändra tappning eller spill i ett kraftverk måste skicka ut en tekniker till det berörda kraftverket. Kraftverket Sjön är bemannat dygnet runt, medan de övriga fyra kraftverken för det mesta är obemannade. Data för vattenkraftverken ges i tabell 6.

Den el som bolaget producerar säljs på den lokala elbörsen ElKräng. Senast kl. 12:00 på torsdagen måste bolaget lämna in sina bud till ElKräng för samtliga timmar under fredagen. Bolaget utgår från att man kan sälja obegränsade mängder till de priser som anges i tabell 7. Eftersom man normalt inte skickar ut tekniker till de obemannade kraftverken under kvälls- och nattetid måste bolaget för att planera driften under fredagen även ta hänsyn till de förväntade priserna på ElKräng under lördag förmiddag, vilka återfinns i tabell 8. (Om man väljer att producera el under fredag kväll kommer man ju också att producera under lördag morgon och då måste man väga in priserna för lördagen i planeringen.).

**a) (14 p)** Formulera Obygdens kraft AB:s planeringsproblem som ett LP-problem under förutsättning att en tekniker från Sjön åker runt till de fyra obemannade kraftverken två gånger per dag

**Tabell 6** Data för Obygdens kraft AB:s kraftverk.

Kraftverk	Startinnehåll i vattenmagasinet [TE]	Maximalt magasininnehåll [TE]	Marginella produktions-ekvivalenter [MWh/TE]		Maximal tappning [TE]		Lokalt inflöde [TE]
			Segment 1	Segment 2	Segment 1	Segment 2	
Sele	700	800	0,165	0,140	40	10	42
Forsen	70	100	0,085	0,070	50	25	2
Fjärd	2 100	3 000	0,110	0,100	80	30	64
Fallet	100	600	0,090	0,080	80	35	5
Sjön	4 000	8 000	0,184	0,176	160	60	20

**Tabell 7** Förväntade priser på ElKräng under fredagen.

Timme	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12
Pris på ElKräng [SEK/MWh]	310	310	305	305	315	330	340	355	370	360	355	345
Timme	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Pris på ElKräng [SEK/MWh]	345	340	335	335	340	345	340	335	330	325	315	305

**Tabell 8** Förväntade priser på ElKräng under lördagen.

Timme	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12
Pris på ElKräng [SEK/MWh]	305	295	285	290	300	315	330	340	340	340	340	340

**Tabell 9** Tidsschema för teknikern.

Sele	7:45–8:15	14:45–15:15
Forsen	6:45–7:15	13:45–14:15
Fjärd	8:45–9:15	15:45–16:15
Fallet	9:45–10:15	16:45–17:15

**Tabell 10** Beteckningar till Obygdens kraft AB:s planeringsproblem.

Beteckning	Förklaring	Värde
$M_{i,0}$	Startinnehåll i magasin $i$	Se tabell 6
$\bar{M}_i$	Maximalt innehåll i magasin $i$	Se tabell 6
$\mu_{i,j}$	Marginell produktions-ekvivalent i kraftverk $i$ , segment $j$	Se tabell 6
$\bar{Q}_{i,j}$	Maximal tappning i kraftverk $i$ , segment $j$	Se tabell 6
$V_i$	Lokal tillrinning till magasin $i$	Se tabell 6
$\lambda_t$	Förväntat pris på ElKräng timme $t$	Se tabell 7 och 8
$\lambda_f$	Förväntat framtida elpris	335

enligt det schema som anges i tabell 9. För torsdag kväll 23–24 planerar man att tappa 40 TE i Sele, 50 TE i Forsen, samt 80 TE vardera i Fjärd och Fallet. Ingen tappning är planerad i Sjön för denna timme och man kommer inte att spilla vatten från något magasin. Sparat vatten antas kunna användas till elproduktion vid bästa verkningsgrad och man räknar med ett framtida elpris på 335 SEK/MWh. Rinntiden mellan kraftverken kan försummas.

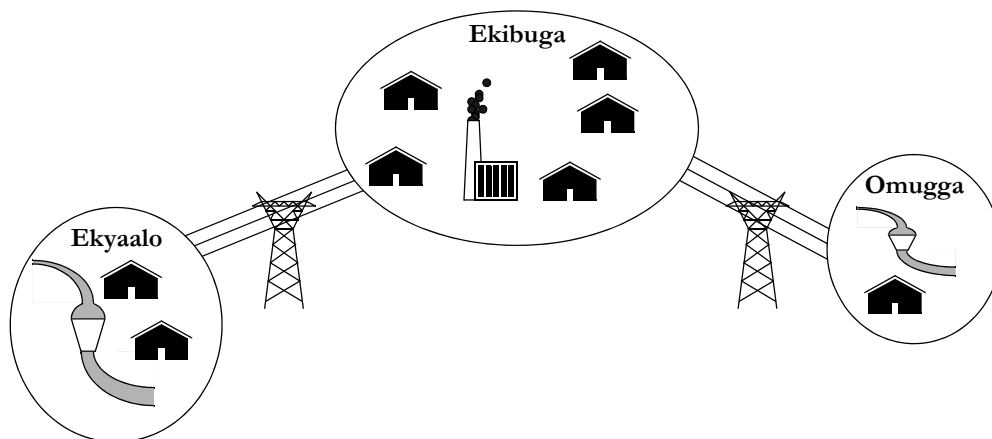
För parametrarna ska beteckningarna i tabell 10 användas (det är dock även tillåtet att lägga till ytterligare beteckningar om man anser att det behövs).

OBS! För att få full poäng på denna uppgift krävs att

- Beteckningarna för optimeringsvariablerna ska vara klart och tydligt definierade.
- Optimeringsproblemet ska vara så formulerat att man tydligt kan se vad som är målfunktion, vad som är bivillkor och vad som är variabelgränser.
- Möjliga värden för alla index ska finnas tydligt angivet vid alla ekvationer.

**b) (6 p)** Antag att man kan välja mellan att låta teknikern åka rundan Forsen-Sele-Fjärd-Fallet (d.v.s. den runda som beskrivs i tabell 9) eller att man åker samma runda men från andra hållet, och att det ska vara möjligt att välja olika resväg vid varje runda. Hur måste planeringsproblemet från a-uppgiften formuleras om för att man ska ta hänsyn till detta? Glöm inte att definiera alla nya variabler och parametrar du inför!

## Uppgift 9 (20 p)



Ekibugadistriktet är inte anslutet till det nationella elnätet i Eggwanga, utan man har ett regionalt nät som omfattar tätorterna Ekibuga och Ekyaaalo, samt ett antal mindre byar. Det regionala nätet försörjs av en dieselgenerator i Ekibuga, samt ett vattenkraftverk i Ekyaaalo och ett vattenkraftverk i Omugga (se figuren ovan). Dieselgeneratoren i Ekibuga har en kapacitet på 500 kW, 90% tillgänglighet samt en rörlig produktionskostnad på 10 ¢/kWh. Vattenkraftverken är strömkraftverk och har en installerad effekt på 400 kW (Ekyaaalo) respektive 150 kW (Omugga). Risken för driftstopp i vattenkraftverken är försumbar och det naturliga vattenflödet förbi kraftverket är alltid tillräckligt stort för att man ska kunna producera installerad effekt.

Ekyaaalo och Omugga är förbundna med Ekibuga via 33 kV-ledningar. Förlusterna på dessa ledningar kan beräknas enligt

$$L = \beta_L \cdot P^2,$$

där

$L$  = förlusterna på ledningen [kW],

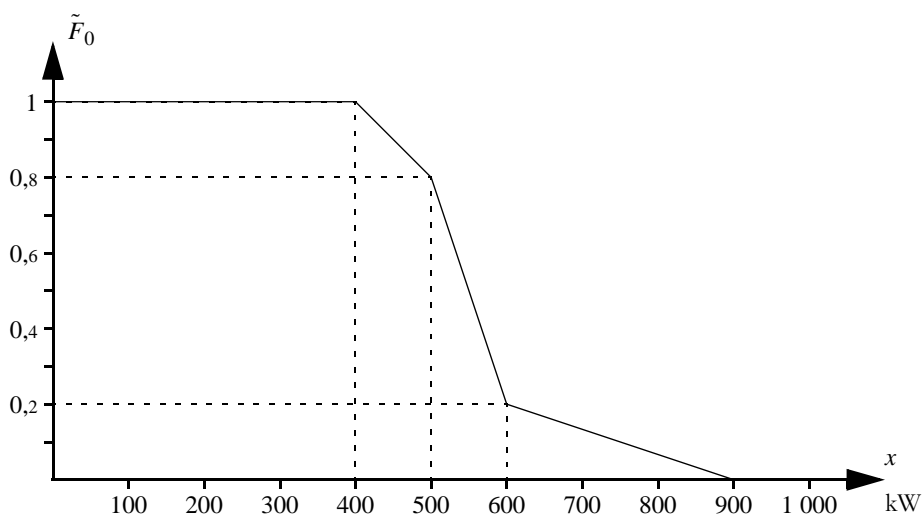
$\beta_L$  = förlustkoefficient [ $\text{kW}^{-1}$ ] =  $\begin{cases} 0,0001 & \text{för ledningen mellan Ekyaaalo och Ekibuga,} \\ 0,0004 & \text{för ledningen mellan Omugga och Ekibuga,} \end{cases}$

$P$  = inmatad effekt på ledningen [kW].

Figuren på nästa sida visar varaktighetskurvan för den totala lasten i det regionala elsystemet. Huvuddelen av den totala lasten finns i Ekibuga; i genomsnitt utgörs 15% av den totala lasten av lokal förbrukning i Ekyaaalo och 5% av lokal förbrukning i Omugga.

**a) (6 p)** Använd stokastisk produktionskostnadssimulering för att beräkna förväntad driftkostnad samt risk för effektbrist för elsystemet i Ekibugadistriktet.

**b) (6 p)** Föreslå ett stratumträd som kan användas för en Monte Carlo-simulering av elsystemet i Ekibugadistriktet. Räkna även ut stratumvikterna och ange vilka värden på resultatvariablerna du förväntar dig i respektive stratum.



**c) (8 p)** I tabell 11 återfinns några scenarier till en Monte Carlo-simulering av elsystemet i Ekibugadistriktet. Använd dessa scenarier för att skatta förväntad driftkostnad samt risk för effektbrist.

OBS! För att få full poäng på denna uppgift måste du använda så många variansreduceringstekniker som möjligt!

**Tabell 11** Några scenarier inklusive utvalda delresultat till en Monte Carlo-simulering av elsystemet i Ekibugadistriktet.

Scenario,	Last [kW]			Tillgänglig kapacitet i dieselgeneratorn [kW]	Elproduktion i dieselgeneratorn {kW}	Totala överförings- förluster [kW]
	Ekibuga	Ekyaaro	Omugga			
1	446	56	30	0	0	17,6
2	447	59	36	0	0	16,8
3	436	89	23	500	14,1	16,1
4	485	72	29	500	52,6	16,6
5	413	100	35	500	12,3	14,3
6	411	102	20	500	0	15,6
7	647	119	33	500	262,4	13,4
8	450	98	39	500	51,0	14,0
9	405	96	37	0	0	14,3
10	434	69	33	0	0	16,4



KTH Elektro-  
och systemteknik

## Svarsblad till del I

Namn: .....

Personnummer: .....

### Uppgift 1

a) Alternativ ..... är korrekt.

b) Alternativ ..... är korrekt.

### Uppgift 2

a) ..... TWh      b) ..... TWh

c) ..... MWh

### Uppgift 3

a) Tidpunkt .....      b) Tidpunkt .....

c) Tidpunkt .....

### Uppgift 4

a) Parametrar: .....

Optimeringsvariabler: .....

b) .....

c) .....

d) ..... m<sup>3</sup>

### Uppgift 5

a) .....      b) .....

c) .....      d) .....  $\alpha$ /h

e) ..... kW

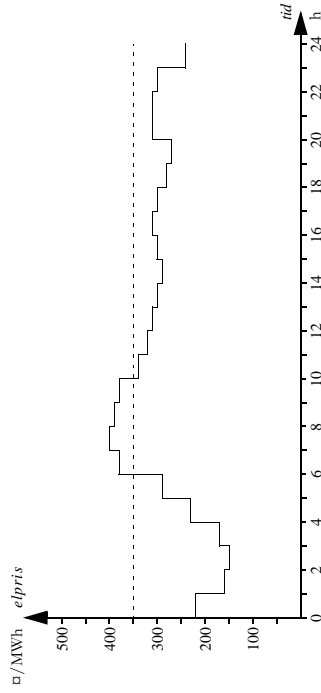
f) *ETOC* .....  $\alpha$ /h      *LOLP* ..... %

### Uppgift 1

- a) 2, b) 5.

### Uppgift 2

- a) Eftersom elpriset är högre under det andra halvåret kommer vattenkraftproducenterna att vilja spara så mycket vatten som möjligt. Således innehåller vattenmagasinen 40 TWh vid halvårsskiftet.  
 b) Totalt finns 20 (startinnehåll) + 50 (tillrinning) – 40 (slutinnehåll) = 30 TWh tillgängligt för vattenkraftproduktion under det första halvåret. Eftersom produktionskostnaderna är försumbara kommer hela denna kapacitet att utnyttjas.  
 c) Kraftverket kommer att producera installerad effekt under de timmar då elpriset är högre än 350 ¢/MWh. Där man ett streck i figuren vid nivån 350 ¢/MWh, finner man att kraftverket kommer att producera 100 MW under 4 timmar, vilket ger en total produktion på 400 MWh under detta dygn.



### Uppgift 3

- a) Eftersom systemet förlorar elproduktion sjunker frekvensen. Normaldrifreserven kan inte hantera ett bortfall på 500 MW, eftersom man skulle få en frekvensminskning  $\Delta f = \Delta G/R = 500/2000 = 0,25$  Hz, vilket är större än det frekvensintervall där normaldrifreserven är tillgänglig — således måste störningsreserven träda in. Det enda tillfälle där frekvensen snabbt sjunker lägre än 49,9 Hz är tidpunkt IV.  
 b) Om produktionen ökar med 250 MW då frekvensen i systemet är lägre än 49,9 Hz så ökar frekvensen med  $\Delta f = \Delta G/R = 250/1500 = 0,167$  Hz. Det enda tillfälle som frekvensen ökar snabbt från en nivå under 49,9 Hz är tidpunkt V, men då ökar frekvensen med närmare 0,25 Hz så det kan inte vara det sökta tillfället.  
 Om produktionen ökar med 250 MW vid normal drift så får man i stället frekvensökningen  $\Delta f =$

$\Delta G/R = 250/2000 = 0,125$  Hz. Detta stämmer väl överens med tidpunkt I.

- c) Då exporten på HVDC-förbindelsen minskar får man en kontinuerlig ökning av frekvensen under en femminutersperiod. Detta kan emellertid vara svårt att upptäcka i frekvenskurvan, eftersom det samtidigt sker andra små frekvensändringar, p.g.a. variationer i last och vindkraft. Det är lättare att leta efter en tidsperiod där frekvensen stegvis minskar med  $\Delta f = \Delta G/R = 100/2000 = 0,05$  Hz då elproduktionen minskar för att kompensera exportminskningen — detta är så pass stora ändringar att de ska synas tydligt i frekvenskurvan. Det enda tillfälle som passar in på detta mönster är tidpunkt VIII.

### Uppgift 4

- a) Parametrar:  $\beta_{Gg}$ ,  $C_g^+$ ,  $\bar{C}_g$ ,  $\lambda_p$ ,  $u_{g,0}$  och  $W_r$ . Opimeringsvariabler:  $G_{g,r}$ ,  $s_{g,r}^+$  och  $u_{g,r}$   
 b) Intäkterna från vindkraftproduktionen kan inte Stads energi AB påverka och behöver därför inte tas med i målfunktionen; alltså får vi

$$\text{maximera } \sum_{r=1}^{24} ((\lambda_r - \beta_{Gg}) C_{g,r}^+ - C_{g,r}^{s,+}),$$

$$r = 1 \dots 24$$

$$u_{g,r} - u_{g,r-1} \leq s_{g,r}^+,$$

- d) Eftersom magasinet fylls på med 150 TE och man tappat 160 TE, så måste det innehålla 1 990 TE = 7 164 000 m<sup>3</sup> vatten i slutet av timmen.

### Uppgift 5

- a)  $\bar{F}_1(x) = 0,1\bar{F}_0(x) + 0,3\bar{F}_0(x-100) + 0,35\bar{F}_0(x-200) + 0,25\bar{F}_0(x-300)$   
 $\Rightarrow \bar{F}_1(x) = 0,1 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 1 + 0,35 \cdot 1 + 0,25 \cdot 1 = 0,96$  för intervallet  $400 \leq x < 500$ .  
 b)  $\bar{F}_1(x) = 0,1\bar{F}_0(x) + 0,3\bar{F}_0(x-100) + 0,35\bar{F}_0(x-200) + 0,25\bar{F}_0(x-300)$   
 $\Rightarrow \bar{F}_1(x) = 0,1 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,35 \cdot 1 + 0,25 \cdot 1 = 0,84$  för intervallet  $500 \leq x < 600$ .  
 c)  $\bar{F}_1(x) = 0,1\bar{F}_0(x) + 0,3\bar{F}_0(x-100) + 0,35\bar{F}_0(x-200) + 0,25\bar{F}_0(x-300)$   
 $\Rightarrow \bar{F}_1(x) = 0,1 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,35 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 1 = 0,65$  för intervallet  $600 \leq x < 700$ .  
 d) Den totala elproduktionen i de fyra dieselgeneratorerna beräknas genom

$$EG_{2345} = EENS_1 - EENS_5 = \int_{300}^{\infty} \bar{F}_1(\xi) d\xi - \int_{1100}^{\infty} \bar{F}_5(\xi) d\xi = 415 - 9 = 406 \text{ kWh/h},$$

vilket ger att  $ETOC = 0,5 \cdot 406 = 203$  ¢/h.

- e) Om det givna slumpvalet betecknas  $U$  så erhålls ett värde på lasten genom  $D = \bar{F}_0^{-1}(U) = \{$ läs av i figuren $\} = 660$  kW.

- f) Följande skattningar erhålls av väntevärdet i respektive stratum:

$$m_{TOC1} = 1200/5 = 240 \quad m_{LOLO1} = 0$$

$$m_{TOC2} = 1560/5 = 312 \quad m_{LOLO2} = 1/5 = 0,2$$

$$m_{TOC3} = 1500/5 = 300 \quad m_{LOLO3} = 5/5 = 1$$

Alltså får vi

$$m_{T0C} = \sum_{h=1}^3 \omega_h m_{T0Ch} = 0.9 \cdot 240 + 0.025 \cdot 312 + 0.075 \cdot 300 = 246.3 \text{ } \square / \text{h},$$

$$m_{L0L0} = \sum_{h=1}^3 \omega_h m_{L0L0h} = 0 + 0.025 \cdot 0.2 + 0.075 \cdot 1 = 8\%.$$

## Uppgift 6

Grönfrids påstående att kärnkraftverket i Strålänge är olönsamt bygger på en enkel analys av intäkter, rörliga kostnader och fasta kostnader. Metoden är rimlig, så frågan är om de har använt rimliga indata i beräkningarna. Låt oss därför titta närmare på de sifferuppgifter som ingår:

- Om ett kärnkraftverk på 1 000 MW körs på full effekt under ett helt år kan det producera 8,76 TWh. Här har Grönfrid räknat med en årsproduktion på 8 TWh (d.v.s. en utnytningsgrad på strax över 90%), vilket är rimligt för ett välskött kärnkraftverk.
- Priset på kärnbränslet har legat tämligen stabilt kring runt 30 000  $\square$ /kg under många år. Om man räknar baklänges baserat på detta pris och ett värmeinnehåll på 880 MWh/kg, så finner man att Grönfrid har räknat med en verkningsgrad

$$\frac{30\,000 \text{ } \square / \text{kg}}{880 \text{ MWh} / \text{kg} \cdot 100 \text{ } \square / \text{MWh}} \approx 34\%,$$

vilket verkar fullt rimligt.

- Investeringkostnaden på 30 miljarder  $\square$  kommer från AB Industriel och Kärnkraftbyggarna AB, och borde således stämma. (Notera att bygget sker till ett fast pris, vilket innebär att ägaren AB Industriel inte riskerar förändringar om bygget blir försenat.) Avskrivningstiden 15 år förefaller rimlig — visserligen kan kärnkraftverk ha betydligt längre teknisk livslängd, men det är tveksamt om någon aktör är beredd att göra så extremt långsiktiga investeringar och dessutom kan det tillkomma dyra investeringar i underhåll under den senare delen av kraftverkets livstid. Det är svårare att bedöma om en kalkylränta på 5% är rimlig (det beror på det ekonomiska läget i Land och det saknar vi uppgifter om). För säkerhets skull kan vi tillämpa annuitetsformeln på några alternativa kalkylräntor och avskrivningstider:

$$\begin{aligned} - r = 1\%, n = 30 \text{ } \text{år} &\Rightarrow AC \approx 1\,162 \text{ M}\square/\text{år} \\ - r = 1\%, n = 15 \text{ } \text{år} &\Rightarrow AC \approx 2\,164 \text{ M}\square/\text{år} \\ - r = 5\%, n = 30 \text{ } \text{år} &\Rightarrow AC \approx 1\,952 \text{ M}\square/\text{år} \\ - r = 5\%, n = 15 \text{ } \text{år} &\Rightarrow AC \approx 2\,890 \text{ M}\square/\text{år} \\ - r = 10\%, n = 30 \text{ } \text{år} &\Rightarrow AC \approx 3\,182 \text{ M}\square/\text{år} \\ - r = 10\%, n = 15 \text{ } \text{år} &\Rightarrow AC \approx 3\,944 \text{ M}\square/\text{år} \end{aligned}$$

Som synes kan man med förmånligare anlägganden om kalkylränta eller avskrivningstid komma ner i en årlig kostnad på ungefär 2 miljarder  $\square$ . Antar man både en låg kalkylränta och lång avskrivningstid kan man komma ner mot 1 miljard  $\square$ , men det får man nog betrakta som en glädjekalkyl.

Det bör noteras att även om investeringskostnaden är en tung del i de fasta kostnaderna, så kommer kraftverket även att ha fasta kostnader för personal, underhåll, nätagifter o.s.v. Dessa kostnader väljer vi dock för enkelhets skull att bortse från i den här analysen.

- Det är riktigt att elpriset under de senaste åren legat kring 300  $\square$ /MWh, men som synes i statusiken har man även haft betydligt högre prisnivåer på elmarknaden i Land. Vi saknar uppgifter om vad som ligger bakom elpriset utveckling i Land och det är

därmed omöjligt att säga något om vad som är troliga framtida elpriser. Vi kan bara konstatera att om vi i övrigt utgår från Grönfrids siffror så krävs det att elpriset är högre än 3 000 M $\square$ /8 TWh (fasta kostnader uppdelat per producerad MWh) + 100 (rörliga kostnader) = 475  $\square$ /MWh för att Strålänge ska gå med vinst. Om man i stället räknar med en fast kostnad på 2 miljarder  $\square$  per år så krävs det ett elpris på 350  $\square$ /MWh.

Det finns ingen anledning att ifrågasätta att AB Industriel räknar med att investeringen i Strålänge ska ge skäligen avkastning. Vad som skiljer deras analys från Grönfrids torde vara att de räknar med ett högre elpris i framtiden och att de eventuellt har använt en lägre kalkylränta eller en längre avskrivningstid. Huruvida kraftverket kommer att bli lönsamt eller inte är med andra ord svårt att säga med ledning av de data som finns tillgängliga, utan det är något som får visas av den framtida utvecklingen i Land.

## Uppgift 7

Vi börjar med att notera att Aland står för en tredjedel av reglerstyrkan i störningsreserven, Beland står för hälften och Celand för en sjättedel. Vid ett bortfall på  $\Delta G$  kommer således produktionen att öka med  $\Delta G/3$ ,  $\Delta G/2$  respektive  $\Delta G/6$  i de tre länderna.

Ett bortfall på 1 200 MW i Aland kompenseras alltså av 400 MW i Aland, 600 MW i Beland och 200 MW i Celand. Eftersom det bara är flödena på växelströmsledningarna som ändras får vi då flödet 2 600 MW mellan Beland och Celand, vilket innebär att ledningen blir överbelastad. Systemet uppfyller således inte kraven. Om man skulle öka överföringen från Beland till Aland till 500 MW (vilket är möjligt eftersom kapaciteten är 600 MW) så skulle vi i stället få flödet 1 900 MW från Beland till Celand och därmed skulle vi ha en tillräcklig reserv på denna ledning för att hantera ett dimensionerande fel i Aland. Ändringen på HVDC-ledningen skulle leda till att flödet mellan Aland och Celand ökar till 1 100 MW, vilket inte är något problem. Vid det dimensionerande felet i Aland skulle importen till Aland behöva öka med 800 MW, vilket betyder att flödet på ledningen mellan Aland och Celand skulle minska till 300 MW (inte heller något problem).

Låt oss nu kontrollera de dimensionerande felet i Beland och Celand under förutsättningen att flödet vid 49,9 Hz är 1 900 MW från Beland till Celand och 1 100 MW från Aland till Celand. Vid ett bortfall på 600 MW i Beland kompenseras 200 MW i Aland, 300 MW i Beland och 100 MW i Celand. Flödet från Aland till Celand måste då öka till 1 300 MW och flödet från Celand till Beland måste minska till 1 600 MW. Ingen av dessa ändringar leder till några problem med överbelastning. Vid ett bortfall på 900 MW i Celand kompenseras 300 MW i Aland, 450 MW i Beland och 150 MW i Celand. Flödet från Aland till Celand måste då öka till 1 400 MW och flödet från Beland till Celand måste öka till 2 350 MW. Inte heller dessa ändringar leder till några problem med överbelastning. Den föreslagna ändringen av flödet på HVDC-ledningen gör alltså att systemet uppfyller de uppställda kraven.

## Uppgift 8

a) I ord kan planeringsproblemet formuleras som

maximera	värdet av $säld\ el + värdet\ av\ sparad\ vatten$ ,
med hänsyn till	hydrologisk balans för vattenmagasinen,
	begränsningar av tappningsvärdingar,
	begränsningar av spilltändringar,
	begränsningar för magasinssinnehåll, tappning och spill.



## Index för kraftverk

Sele 1, Forsen 2, Fjård 3, Fallet 4, Sjön 5.

## Parametrar

Utöver de parametrar som är definierade i tabell 10 i uppgiftslydelsen inför vi följande:

$Q_{i,j,0}$  = tappning i kraftverk  $i$ , segment  $j$ , vid planeringsperiodens början =

$$\begin{cases} 40 & i = 1, j = 1, \\ 50 & i = 2, j = 1, \\ 80 & i = 3, j = 1, \\ 80 & i = 4, j = 1, \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

$S_{i,0}$  = spill från magasin  $i$  vid planeringsperiodens början = 0,  $i = 1, \dots, 5$ .

## Optimeringsvariabler

$Q_{i,j,t}$  = tappning i kraftverk  $i$ , segment  $j$ , under timme  $t$ ,

$$i = 1, \dots, 5, j = 1, 2, t = 1, \dots, 36,$$

$S_{i,t}$  = spill från magasin  $i$  under timme  $t$ ,  $i = 1, \dots, 5, t = 1, \dots, 36$ ,

$M_{i,t}$  = innehåll i magasin  $i$  vid slutet av timme  $t$ ,  $i = 1, \dots, 5, t = 1, \dots, 36$ .

## Målfunktion

36 5 2

$$\text{maximera } \sum_{t=1}^{36} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^2 (\mu_{1,i} + \mu_{2,1} + \mu_{5,1}) M_{1,36} + (\mu_{2,1} + \mu_{5,1}) M_{2,36} + (\mu_{3,1} + \mu_{4,1} + \mu_{5,1}) M_{3,36} + (\mu_{4,1} + \mu_{5,1}) M_{4,36} + \mu_{5,1} M_{5,36}$$

## Bivillkor

Hydrologisk balans för Sele:

$$M_{1,t} = M_{1,t-1} - Q_{1,1,t} - Q_{1,2,t} - S_{1,t} + V_{1,t} \quad t = 1, \dots, 36,$$

Hydrologisk balans för Forsen:

$$M_{2,t} = M_{2,t-1} - Q_{2,1,t} - Q_{2,2,t} - S_{2,t} + Q_{1,1,t} + Q_{1,2,t} + S_{1,t} + V_{2,t} \quad t = 1, \dots, 36,$$

Hydrologisk balans för Fjård:

$$M_{3,t} = M_{3,t-1} - Q_{3,1,t} - Q_{3,2,t} - S_{3,t} + V_{3,t} \quad t = 1, \dots, 36,$$

Hydrologisk balans för Fallet:

$$M_{4,t} = M_{4,t-1} - Q_{4,1,t} - Q_{4,2,t} - S_{4,t} + Q_{3,1,t} + Q_{3,2,t} + S_{3,t} + V_{4,t} \quad t = 1, \dots, 36,$$

Hydrologisk balans för Sjön:

$$M_{5,t} = M_{5,t-1} - Q_{5,1,t} - Q_{5,2,t} - S_{5,t} + Q_{2,1,t} + Q_{2,2,t} + S_{2,t} + Q_{4,1,t} + Q_{4,2,t} + S_{4,t} + V_{5,t} \quad t = 1, \dots, 36,$$

Begränsningar av tappningsändringar i Sele:

$$Q_{1,1,t} + Q_{1,2,t} = Q_{1,1,t-1} + Q_{1,2,t-1} \quad t = 1, \dots, 8, 10, \dots, 15, 17, \dots, 32, 34, 35, 36,$$

Begränsningar i spilländringar i Sele:

$$S_{1,t} = S_{1,t-1}$$

$$t = 1, \dots, 8, 10, \dots, 15, 17, \dots, 32, 34, 35, 36,$$

Begränsningar av tappningsändringar i Forsen:

$$Q_{2,1,t} + Q_{2,2,t} = Q_{2,1,t-1} + Q_{2,2,t-1} \quad t = 1, \dots, 7, 9, \dots, 14, 16, \dots, 31, 33, \dots, 36,$$

Begränsningar i spilländringar i Forsen:

$$S_{2,t} = S_{2,t-1} \quad t = 1, \dots, 7, 9, \dots, 14, 16, \dots, 31, 33, \dots, 36,$$

Begränsningar av tappningsändringar i Fjård:

$$Q_{3,1,t} + Q_{3,2,t} = Q_{3,1,t-1} + Q_{3,2,t-1} \quad t = 1, \dots, 9, 11, \dots, 16, 18, \dots, 33, 35, 36,$$

Begränsningar i spilländringar i Fjård:

$$S_{3,t} = S_{3,t-1} \quad t = 1, \dots, 9, 11, \dots, 16, 18, \dots, 33, 35, 36,$$

Begränsningar av tappningsändringar i Fallet:

$$Q_{4,1,t} + Q_{4,2,t} = Q_{4,1,t-1} + Q_{4,2,t-1} \quad t = 1, \dots, 10, 12, \dots, 17, 19, \dots, 34, 36,$$

Begränsningar i spilländringar i Fallet:

$$S_{4,t} = S_{4,t-1} \quad t = 1, \dots, 10, 12, \dots, 17, 19, \dots, 34, 36,$$

## Variabelgränser

$$0 \leq Q_{i,j,t} \leq \bar{Q}_{i,j} \quad i = 1, \dots, 5, j = 1, 2, t = 1, \dots, 36,$$

$$0 \leq S_{i,t} \quad i = 1, \dots, 5, t = 1, \dots, 36,$$

$$0 \leq M_{i,t} \leq \bar{M}_i \quad i = 1, \dots, 5, t = 1, \dots, 36,$$

b) Under planeringsperioden kommer teknikern att göra tre rundor, där vi för varje runda ska kunna välja i vilken riktning kraftverken passerar. Detta hanteras vi lämpligen genom att införa en ny heltalsvariabel:

$d_r$  = riktning för runda  $r$  (1 om teknikern åker rundan Forsen-Sele-Fjård-Fallet och 0 om teknikern åker åt andra hållet),  $r = 1, 2, 3$ ,

där  $r = 1$  syftar på fredag förmiddag,  $r = 2$  fredag eftermiddag och  $r = 3$  lördag förmiddag.

Vi måste nu modifiera bivillkoren för begränsningar av tappningsändringar under de timmar då det är möjligt att teknikern passerar:

$$-1000d_r \leq Q_{1,1,t} + Q_{1,2,t} - Q_{1,1,t-1} - Q_{1,2,t-1} \leq 1000d_r \quad t = 9, r = 1, \\ t = 16, r = 2, \\ t = 33, r = 3,$$

$$-1000(1-d_r) \leq Q_{1,1,t} + Q_{1,2,t} - Q_{1,1,t-1} - Q_{1,2,t-1} \leq 1000d_r \quad t = 10, r = 1, \\ t = 17, r = 2, \\ t = 34, r = 3,$$

$$-1000d_r \leq Q_{2,1,t} + Q_{2,2,t} - Q_{2,1,t-1} - Q_{2,2,t-1} \leq 1000d_r \quad t = 8, r = 1, \\ t = 15, r = 2, \\ t = 32, r = 3,$$



tet och total last utan att ta hänsyn till transmissionsförlusterna.

Scenario	Stratum	Total last [kW]	TOC [ $\square$ /h]	TOC <sub>SPS</sub> [ $\square$ /h]	LOLO	LOLO <sub>SPS</sub>
1	2	532	0	0	0	0
2	2	542	0	0	1	0
3	5	548	141	0	0	0
4	6	586	526	360	0	0
5	5	548	123	0	0	0
6	5	533	0	0	0	0
7	6	799	2 624	2 490	0	0
8	6	587	510	370	0	0
9	2	538	0	0	1	0
10	2	536	0	0	1	0

Vi får således följande skattningar av skillnaden mellan multi-areamodellen och SPS-modellen:

Stratum, $h$	Skattning av $m_{TOCD}$	Skattning av $m_{LOLD}$
1	0 (analytiskt resultat)	0 (analytiskt resultat)
2	0 (analytiskt resultat)	$(0 + 1 + 1 + 1)/4 = 0,75$
3	0 (analytiskt resultat)	0 (analytiskt resultat)
4	0 (analytiskt resultat)	0 (analytiskt resultat)
5	$(141 + 123 + 0)/3 = 88$	0 (analytiskt resultat)
6	$(166 + 134 + 140)/3 \approx 146,67$	0 (analytiskt resultat)
Skattad skillnad mellan multi-areamodellen och SPS-modellen, $m = \sum_{h=1}^6 \omega_h m(x-z)_h$	$0,135 \cdot 88 + 0,45 \cdot 146,67 \approx 77,9$	$0,015 \cdot 0,75 \approx 0,011$

Väntevärdena för kontrollvariablerna beräknades i uppgift 9a, vilket ger oss de slutliga skattningarna

$$ETOC = m_{TOCD} + \mu_{TOCSPS} = 77,9 + 427,5 = 505,4 \square / h,$$

$$LOLP = m_{LOLD} + \mu_{LOLDSPS} = 0,011 + 0,05 = 0,061 = 6,1\%.$$