Uppgift 1

Cirkeln $x^2 + y^2 = 16$ och linjen $x + y = 2$ skär varandra i två punkter.
Bestäm en vektor som går mellan skärningspunkterna.
Bestäm längden av denna vektor.

- **Lösningsförslag**

Bestäm först skärningspunkterna. Linjens ekvation ger $x = 2 - y$. Insättes detta i cirkeln ekvation får vi:

$$(2 - y)^2 + y^2 = 16$$

vilket ger skärningspunkterna $\left(1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}\right)$ och $\left(1 + \sqrt{7}, 1 - \sqrt{7}\right)$

En möjlig vektor mellan punkterna är då

$$\left(1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}\right) - \left(1 + \sqrt{7}, 1 - \sqrt{7}\right) = \left(-2\sqrt{7}, 2\sqrt{7}\right)$$

med längden

$$2\sqrt{14}$$

Uppgift 2

Bestäm realdel och imaginärdel för $\frac{7+i}{1-2i}$

- **Lösningsförslag**

$$\frac{7+i}{1-2i} = \frac{7+i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{5+15i}{5} = 1+3i$$

Dvs realdelen är 1 och imaginärdelen är 3

Uppgift 3

Transformationen $A\vec{x}$ avbildar $\vec{x}$ på ett underrum till R^3. Bestäm en bas för detta underrum.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

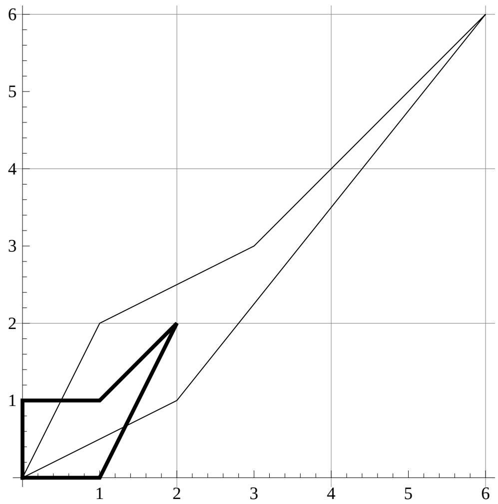
- **Lösningsförslag**

Kolonnerna i matrisen spänner upp underrummet. Kolonnvektorerna är parallella, ty $\boldsymbol{v}_2 = -2\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{v}_1$

Vi kan t.ex. välja $v_1 = (1, 3, -1)$ som bas.

Uppgift 4

Bestäm transformationsmatrisen för den linjära transformation som transformerar den lilla figuren till den stora figuren.



- **Lösningsförslag**

Genom att studera hur enhetsvektorerna avbildas kan vi bestämma transformationsmatrisen. $(1,\ 0)$ avbildas på $(2,\ 1)$ och $(0,\ 1)$ avbildas på$(1,\ 2)$

Detta ger matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Uppgift 5

Bestäm kortaste avståndet mellan punkten (3, 6) och det underrum till R^2 som spänns upp av vektorn (3,3).

- **Lösningsförslag**

Kortaste avståndet ges av den ortogonala projektionen av
(3, 6) på underrummet, dvs. på vektorn t(3,3).
Projektionen blir

$$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}\,\boldsymbol{v} = \frac{(3,6)\,(3,3)}{18}\,(3,\ 3) = \left(\frac{9}{2},\ \frac{9}{2}\right)$$

Kortaste avståndet beskrivs av vektorn $(3,\ 6) - \left(\frac{9}{2},\ \frac{9}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

Avståndet blir därför längden av denna vektor: $\frac{3}{\sqrt{2}}$

Uppgift 6

Bestäm ett tredjegradspolynom som passerar genom punkterna

$(-1, 3), (0, 3), (1, 5), (2, 3)$.

- **Lösningsförslag**

Vi söker ett polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
och sätter upp en ekvation punkt och får då ett ekvationssytem som beskrivs av totalmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss polynomet $p(x) = 3 + 2x + x^2 + -x^3$

Uppgift 7

Bestäm en normerad bas för det underrum till R^4 som spänns upp av vektorerna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Lösningsförslag**

Genom att reducera en totalmatris med vektorerna som kolonner får vi:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 4 & -1 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektorerna är alltså linjärt oberoende och spänner upp hela R^4
En normerad bas för detta underrum är kolonnerna i den reducerade matrisen

---

Uppgift 8

Visa att matrisen har en egenvektor $(1, 2, 1)$ med egenvärdet 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$