



KTH Elektro-  
och systemteknik

## Tentamen i EG2050 Systemplanering, 15 mars 2012, 14:00–19:00, L21-22, L31, L41-44, Q21

### Tillåtna hjälpmedel

Vid denna tentamen får följande hjälpmedel användas:

- Miniräknare utan information med anknytning till kursen.
- En **handskriven, enkelsidig** A4-sida med **egna** anteckningar (original, ej kopia).  
Denna sida skall lämnas in tillsammans med svarsbladet.



## DEL I (OBLIGATORISK)

Skriv alla svar på det bifogade svarsbladet. Några motiveringar eller beräkningar behöver inte redovisas.

Del I kan totalt ge 40 poäng. Godkänt betyg garanteras vid 33 poäng. Om resultatet på del I uppgår till minst 31 poäng ges möjlighet att vid en extra skrivning komplettera till godkänt betyg (E).

### Uppgift 1 (4 p)

Besvara följande teorifrågor genom att välja *ett* alternativ, som du anser är korrekt.

**a) (1 p)** Vilken eller vilka aktörer har ansvaret för att frekvensen i elsystemet hålls inom de nominella gränserna (t.ex. 49,9–50,1 Hz i Nordel-systemet)?

1. Systemoperatören.
2. De balansansvariga.
3. Producenterna.

**b) (2 p)** På en vertikalt integrerad elmarknad gäller att I) Kraftbolagen är fria att sälja till vilka andra kraftbolag som helst, II) All elhandel måste ske via en elbörs, III) Konsumenterna är fria att köpa från vilken producent eller återförsäljare som helst.

1. Inget av påståendena är sanna.
2. Endast I är sant.
3. Endast II är sant.
4. Endast III är sant.
5. I och III är sanna men inte II.

**c) (1 p)** Vad gäller för ett uppregeringsbud?

1. Ett elbolag säljer el till en kund och kunden måste i förväg meddela elbolaget exakt hur mycket energi man kommer att förbruka under varje handelsperiod.
2. En aktör erbjuder sig att på systemoperatörens begäran öka sin elproduktion (alternativt minska sin elförbrukning).
3. En aktör erbjuder sig att på systemoperatörens begäran minska sin elproduktion (alternativt öka sin elförbrukning).

## Uppgift 2 (6 p)

Betrakta den gemensamma elmarknaden för de två länderna Rike och Maa. Antag att det råder perfekt konkurrens, att alla aktörer har perfekt information, samt att det inte finns några magasinbegränsningar eller effektbegränsningar i kraftverken. Elsystemen i Rike och Maa är förbundna via en HVDC-ledning, som maximalt kan överföra ett visst antal TWh per år. Data för den gemensamma elmarknaden framgår av tabell 1. De rörliga produktionskostnaderna antas vara linjära inom de angivna intervallen, d.v.s. då produktionen är noll är priset på den lägsta nivån och vid maximal produktion är priset maximalt.

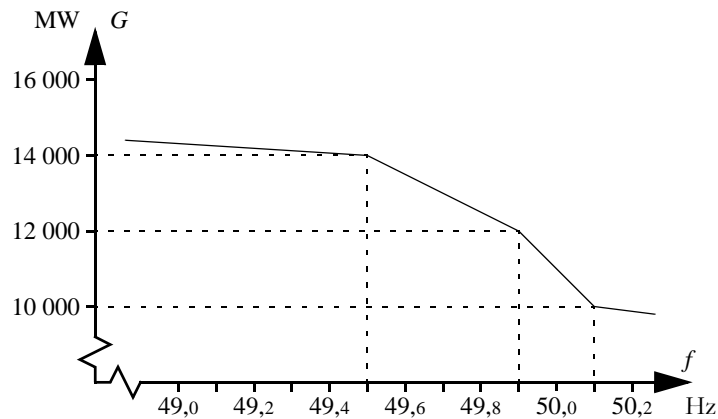
**Tabell 1** Data för elmarknaden i Rike och Maa.

Kraftslag	Produktionskapacitet [TWh/år]		Rörlig produktionskostnad [ϰ/MWh]
	Rike	Maa	
Vattenkraft	50	25	30–60
Kärnkraft	32	28	100–120
Kolkondens	20	20	300–500
Gasturbiner	5	5	800–1 000
Elförbrukning [TWh/år]	80	75	

- a) (2 p)** Antag att elpriset i Rike är  $380 \text{ ϰ/MWh}$ . Hur mycket producerar kolkondenskraftverken i Rike?
- b) (2 p)** Antag att elpriset i Rike är  $380 \text{ ϰ/MWh}$  och att elpriset i Maa är högre än  $380 \text{ ϰ/MWh}$ . Hur stor är överföringskapaciteten mellan Rike och Maa?
- c) (2 p)** Vilket elpris får man i Maa?

### Uppgift 3 (6 p)

Figuren nedan visar den totala elproduktionen (exklusive vindkraft) som funktion av frekvensen i ett visst elsystem.



- a) (2 p)** Klockan 11:04 råder balans mellan produktion och konsumtion i systemet och frekvensen är 50,04 Hz. Vid detta tillfälle minskar lasten i systemet med 100 MW. Vilken frekvens får man i systemet efter att primärregleringen återställt balansen mellan produktion och konsumtion?
- b) (2 p)** Klockan 11:06 råder balans mellan produktion och konsumtion i systemet och frekvensen är 50,04 Hz. Vid detta tillfälle ökar vindkraftproduktionen i systemet med 100 MW. Vilken frekvens får man i systemet efter att primärregleringen återställt balansen mellan produktion och konsumtion?
- c) (2 p)** Klockan 11:08 råder balans mellan produktion och konsumtion i systemet och frekvensen är 49,86 Hz. Vid detta tillfälle slår ett blixtnedslag i ett ställverk ut regionnätet i Stad, vilket innebär att 1 100 MW last kopplas bort. Vilken frekvens får man i systemet efter att primärregleringen återställt balansen mellan produktion och konsumtion?

## Uppgift 4 (12 p)

Stads energi AB äger ett termiskt kraftverk med tre block. Dessutom äger man en vindkraftpark. Antag att bolaget formulerat sitt korttidsplaneringsproblem som ett MILP-problem och att man har infört följande beteckningar:

Index för kraftverken: Block I - 1, Block II - 2, Block III - 3.

$$\begin{aligned}\beta_{Gg} &= \text{rörlig produktionskostnad i kraftverk } g, \\ C_g^+ &= \text{startkostnad i kraftverk } g, g = 1, 2, 3, \\ C_g^- &= \text{stoppkostnad i kraftverk } g, g = 1, 2, 3, \\ D_t &= \text{avtalad last timme } t, t = 1, \dots, 24, \\ G_{g,t} &= \text{elproduktion i kraftverk } g, \text{ timme } t, g = 1, 2, 3, t = 1, \dots, 24, \\ \bar{G}_g &= \text{installerad effekt i kraftverk } g, g = 1, 2, 3, \\ \underline{G}_g &= \text{minimal elproduktion då kraftverk } g \text{ är i drift, } g = 1, 2, 3, \\ \lambda_t &= \text{förväntat elpris timme } t, t = 1, \dots, 24, \\ p_t &= \text{köp från ElKräng timme } t, t = 1, \dots, 24, \\ r_t &= \text{försäljning till ElKräng timme } t, t = 1, \dots, 24, \\ s_{g,t}^+ &= \text{startvariabel för kraftverk } g, \text{ timme } t, g = 1, 2, 3, t = 1, \dots, 24, \\ s_{g,t}^- &= \text{stoppvariabel för kraftverk } g, \text{ timme } t, g = 1, 2, 3, t = 1, \dots, 24, \\ u_{g,t} &= \text{driftstatus i kraftverk } g, \text{ timme } t, g = 1, 2, 3, t = 1, \dots, 24, \\ W_t &= \text{förväntad vindkraftproduktion timme } t, t = 1, \dots, 24.\end{aligned}$$

**a) (5 p)** Stads energi AB säljer el till kunder med fastkraftavtal, men bolaget har också möjlighet att handla på den lokala börsen ElKräng. Formulera målfunktionen i bolagets planeringsproblem om syftet med planeringen är att maximera intäkterna från el såld på ElKräng minus kostnaden för el köpt från ElKräng och minus kostnaderna i det termiska kraftverket. Använd beteckningarna ovan.

**b) (4 p)** Antag att Stads energi AB dels säljer el till kunder med fastkraftavtal och dels handlar man på den lokala elbörsen, ElKräng, där man har möjlighet att både köpa och sälja el. Formulera lastbalansbivillkoret i bolagets korttidsplaneringsproblem. Använd beteckningarna ovan.

**c) (3 p)** Vid installerad effekt producerar vattenkraftverket Fallet 200 MW och produktionsekvivalenten är då 0,8 MWh/TE. Magasinet rymmer 1 800 000 m<sup>3</sup>. Antag att kraftverken uppströms varken tappar eller spiller något vatten och att det lokala tillflödet är försumbart. Om man börjar med ett fullt magasin, hur många timmar kan man då producera installerad effekt i Fallet innan magasinet är tömt?

## Uppgift 5 (12 p)

Akabuga är en liten stad i Östafrika. Staden är inte ansluten till något nationellt elnät, utan man har ett eget lokalt system som försörjs av ett vattenkraftverk och två dieselgeneratorer. Vattenkraftverket är ett strömkraftverk och har en installerad effekt på 400 kW och risken för driftstopp är försumbar. Det naturliga vattenflödet förbi kraftverket är alltid tillräckligt stort för att man ska kunna producera installerad effekt. Dieselgeneratorerna har en installerad effekt på 200 kW vardera, tillgänglighet är 85% och driftkostnad 10 ₪/kWh. I tabell 2 visas några delresultat då man genomför en stokastisk produktionskostnadssimulering av elsystemet i Akabuga.

**a) (2 p)** Använd stokastisk produktionskostnadssimulering för att beräkna den förväntade icke-levererade energin per timme i Akabuga.

**Tabell 2** Resultat från en stokastisk produktionskostnadssimulering av elsystemet i Akabuga.

	$x = 200$	$x = 400$	$x = 600$	$x = 800$	$x = 1\ 000$	$x = 1\ 200$	$x = \infty$
$\tilde{F}_0(x)$	1,000	0,996	0,500	0,004	0,000	0,000	0,000
$\int_0^x \tilde{F}_0(\xi) d\xi$	200,0	399,9	570,1	599,9	600,0	600,0	600,0
$\tilde{F}_1(x)$	1,000	0,996	0,500	0,004	0,000	0,000	0,000
$\int_0^x \tilde{F}_1(\xi) d\xi$	200,0	399,9	570,1	599,9	600,0	600,0	600,0
$\tilde{F}_2(x)$	1,000	0,997	0,574	0,078	0,001	0,000	0,000
$\int_0^x \tilde{F}_2(\xi) d\xi$	200,0	399,9	574,6	625,4	630,0	630,0	630,0
$\tilde{F}_3(x)$	1,000	0,997	0,638	0,153	0,012	0,000	0,000
$\int_0^x \tilde{F}_3(\xi) d\xi$	200,0	399,9	578,4	647,8	659,3	660,0	660,0

**b) (2 p)** Använd stokastisk produktionskostnadssimulering för att beräkna den *sammanlagda* förväntade elproduktionen per timme i de två dieselgeneratorerna.

**c) (1 p)** Använd stokastisk produktionskostnadssimulering för att beräkna den förväntade totala driftkostnaden per timme i Akabuga.

**d) (2 p)** Använd stokastisk produktionskostnadssimulering för att beräkna risken för effektbrist i Akabuga.

**e) (2 p)** Den totala lasten i Akabuga är normalfördelad. Antag att systemet simuleras med Monte Carlo-teknik och att man slumpat fram värdet 400 kW för den totala lasten. Vad är slump-talskomplementet till detta slumpstal?

**f) (3 p)** Antag att elsystemet i Akabuga simuleras med stratifierad sampling. Man har valt att använda tre stratum, vars stratumvikter redovisas i tabell 3. Effektbrist uppstår aldrig i stratum 1. I stratum 2 uppstår effektbrist i 46% av studerade scenarierna. I stratum 3 uppstår effektbrist i samtliga scenarier. Vilken skattning av *LOLP* får man för detta system?

**Tabell 3** Stratum i simuleringen av Akabuga.

Stratum, $h$	1	2	3
Stratumvikt, $\omega_h$	0,8	0,05	0,15

## DEL II (FÖR HÖGRE BETYG ÄN GODKÄNT)

Alla beteckningar som införs skall förklaras. Lösningarna skall vara så utförliga att det utan problem går att följa tanke- och beräkningsgången.

Svaren på de olika uppgifterna skall lämnas in på olika blad, men svar på deluppgifter (a, b, c, o.s.v) kan skrivas på samma blad. Fälten *Namn*, *Blad nr* och *Uppgift nr* skall fyllas i på varje blad.

Del II kan ge totalt 60 poäng. Del II kommer endast att rättas om tentanden erhållit minst 33 poäng på del I. Om så är fallet summeras resultatet på del I, del II och bonuspoängen. Denna summa ligger till grund för vilket betyg (A, B, C, D, E) som ges på tentamen.

### Uppgift 6 (10 p)

Prisbildningen på elmarknaden i Land utgår från långtidsprognoser för de närmaste 12 månaderna. I dessa långtidsprognoser skattar man den maximala elproduktionen i kraftverken under olika tidsperioder, så som visas i tabell 4. I slutet av april är vattenmagasinen normalfyllda och aktörerna på elmarknaden förväntar sig att de närmaste året kommer att bli ett normalår. Under den årliga avställningen för underhåll av kärnkraftverken i Land upptäcker man emellertid en rad säkerhetsproblem som måste åtgärdas, vilket leder till att aktörerna från och med början av augusti förväntar sig en lägre kärnkraftproduktion fram till slutet av året. Därefter följer en ovanligt blöt och blåsig höst, vilket leder till att vattenmagasinen är ovanligt välfyllda och att vindkraften producerar mer än förväntat.

Bortsett från den ovan beskrivna inkompleta informationen (som alltså är densamma för alla aktörer) så kan man anta att det råder perfekt konkurrens och att det inte finns några transmissions-, effekt- eller magasinbegränsningar på elmarknaden i Land. De rörliga produktionskostnaderna framgår av tabell 4 och antas vara linjära i de angivna intervallen, d.v.s. då produktionen är noll är priset på den lägsta nivån och vid maximal produktion är priset maximalt. Lasten i Land är inte priskänslig och kan antas vara 150 TWh för de närmaste året oavsett tidpunkt.

**Tabell 4** Prognoser för elproduktionen i Land under de närmaste tolv månaderna.

Kraftslag	Förväntad produktionskapacitet under de närmaste tolv månaderna [TWh]			Rörlig kostnad [€/MWh]
	Maj	Augusti	Oktober	
Vindkraft	6	6	7	5
Vattenkraft	65	65	75	5
Kärnkraft	70	62	65	80–120
Fossila bränslen	20	20	20	300–500

**a) (6 p)** Beräkna hur elpriset i Land varierar under perioden maj till november.

**b) (4 p)** Strålinge Kraftverksgrupp AB äger två kärnreaktorer med en sammanlagd installerad effekt på 1 200 MW. Reaktorerna i Strålinge genomgick en omfattande revision redan förra året och berörs inte av de säkerhetsproblem som nämnts ovan. Enligt bolagets planering ska Strålinge 2 vara avställd från 1 juli till 31 augusti. Skulle det vara lönsamt för bolaget att avsiktligt försena underhållet av Strålinge 2 med en vecka i september? En sådan försening skulle innebära att bolagets produktionskapacitet under augusti och september reduceras från 1,1 TWh till 1,0 TWh. Den rörliga produktionskostanden i Strålinge 2 kan antas vara 100 €/MWh och man kan anta att alla



aktörer på elmarknaden skulle få information om den ytterligare reduceringen av produktionskapaciteten i prognosen för augusti (att reduceringen är avsiktlig skulle däremot vara en väl bevarad företagshemlighet).

## Uppgift 7 (10 p)

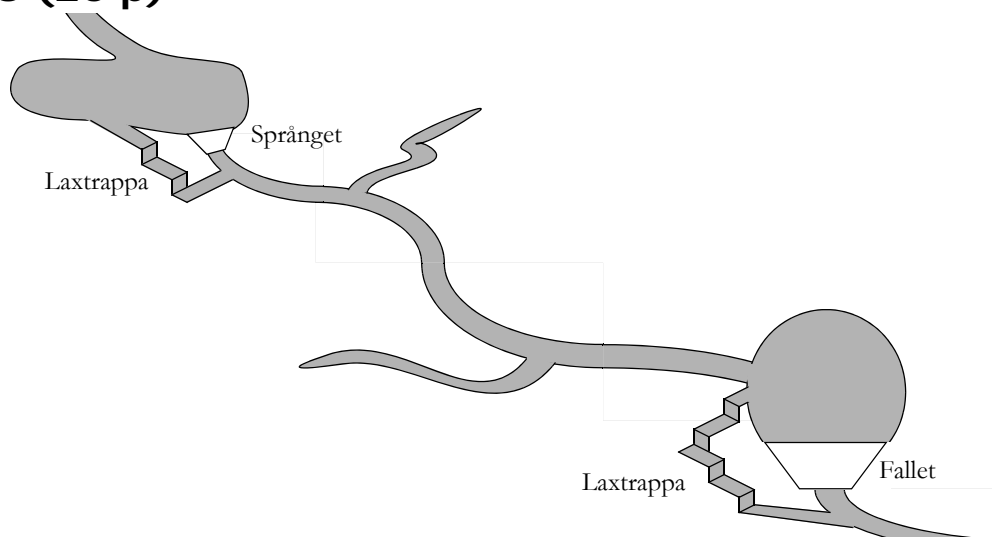
Elsystemet i Rike är uppdelat i två delar. I den norra delen av systemet finns stora mängder vattenkraft, men huvuddelen av lasten ligger i den södra delen. Primärregleringen i Rike är uppdelad i en normaldriftreserv och en störningsreserv. Normaldriftreserven är tillgänglig i frekvensintervallet 49,9–50,1 Hz och är på totalt 3 000 MW/Hz, varav 2 500 MW/Hz tillhandahålls av kraftverk i norra Rike. Störningsreserven är tillgänglig i frekvensintervallet 49,5–49,9 Hz och är på totalt 2 500 MW/Hz, varav 2 000 MW/Hz tillhandahålls av kraftverk i norra Rike.

**a) (6 p)** Mellan de två områdena finns åtta stycken växelströmsledningar som vardera har en maximal överföringskapacitet på 500 MW. Dessutom finns en likströmsförbindelse, som också kan överföra maximalt 500 MW. Effektflödet på likströmsförbindelsen styrs manuellt av systemoperatören, Riksnät, och påverkas vare sig av frekvensen i systemet eller hur produktion och konsumtion är fördelad.

Den totala överföringskapaciteten från mellan norr och söder är således 4 500 MW, men hela denna kapacitet kan inte utnyttjas av elmarknadens aktörer, eftersom Riksnät måste ha marginaler dels för primärregleringen och dels för att kunna hantera bortfall på transmissionsledningar. Det krav som gäller är att systemet ska klara att en av ledningarna kopplas bort, samtidigt som både normaldriftreserven och störningsreserven är fullt utnyttjade för att täcka lastökningar och produktionsbortfall i södra Rike. (Lasten och den elproduktion som inte deltar i primärregleringen kan alltså antas vara oförändrad i norra Rike.) Hur stor överföringskapacitet kan man låta elmarknadens aktörer utnyttja (d.v.s. vilken är den högsta tillåtna överföringen då frekvensen är exakt 50 Hz) om man ska uppfylla detta krav?

**b) (4 p)** Antag att man förser likströmsförbindelsen med ett frekvenskänsligt styrsystem, så att överföringen på denna förbindelse blir en linjär funktion av frekvensen i systemet:  $P = a + bf$ , där  $a$  och  $b$  är två konstanter som kan väljas fritt. Kan ett sådant styrsystem användas för att öka den del av överföringskapaciteten mellan norr och söder som står till elmarknadens förfogande? Hur ska man i så fall välja konstanterna  $a$  och  $b$ ?

## Uppgift 8 (20 p)



AB Vattenkraft äger två vattenkraftverk lokaliserade enligt figuren ovan. Data för vattenkraftverken ges i tabell 5. Bolaget planerar att sälja sin elproduktion på den lokala elbörsen ElKräng. Man antar att man kan sälja så mycket man önskar till de priser som anges i tabell 6. Därefter räknar man med ett genomsnittligt elpris på 400 SEK/MWh och att sparat vatten kan användas till elproduktion vid bästa verkningsgrad. Rinntiden mellan kraftverken kan försummas.

Eftersom älven där AB Vattenkrafts kraftverk ligger är ett mycket viktigt lekområde för lax har Miljödomstolen förelagt bolaget att bygga laxtrappor förbi kraftverken. Flödet genom respektive laxtrappa måste alltid uppgå till minst  $1 \text{ m}^3/\text{s}$ ; detta vatten kan alltså ej användas till elproduktion. Vidare har Miljödomstolen med hänsyn till turismen föreskrivit att dygnsmedelvärdet för flödet i älvsträckorna nedströms om kraftverken inte får understiga  $10 \text{ m}^3/\text{s}$ .

**a) (10 p)** Formulera AB Vattenkrafts planeringsproblem som ett LP-problem. För parametrarna ska beteckningarna i tabell 7 användas (det är dock även tillåtet att lägga till ytterligare beteckningar om man anser att det behövs).

OBS! För att få full poäng på denna uppgift krävs att

- Beteckningarna för optimeringsvariablerna ska vara klart och tydligt definierade.
- Optimeringsproblemet ska vara så formulerat att man tydligt kan se vad som är målfunktion, vad som är bivillkor och vad som är variabelgränser.
- Möjliga värden för alla index ska finnas tydligt angivet vid alla ekvationer.

**b) (10 p)** Då man startar ett vattenkraftverk måste man tappa en del vatten förbi turbinerna utan att man producerar någon el. Låt  $\xi_i$  beteckna den mängd vatten som förloras då man startar kraftverk  $i$ . Hur måste planeringsproblemet från a-uppgiften formuleras om för att man ska ta hänsyn till dessa förluster? Glöm inte att definiera alla nya variabler och parametrar du inför!

**Tabell 5** Data för AB Vattenkrafts kraftverk.

Kraftverk	Startinnehåll i vattenmagasinet [TE]	Maximalt magasininnehåll [TE]	Marginella produktions-ekvivalenter [MWh/TE]		Maximal tappning [TE]		Lokalt inflöde [TE]
			Segment 1	Segment 2	Segment 1	Segment 2	
Språnget	1 000	3 600	0,64	0,56	85	30	112
Fallet	1 200	3 900	0,72	0,64	125	40	2

**Tabell 6** Förväntade priser på ElKräng.

Timme	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12
Pris på ElKräng [SEK/MWh]	325	265	255	255	245	300	370	395	420	425	425	425
Timme	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Pris på ElKräng [SEK/MWh]	420	425	415	415	410	415	415	410	395	385	395	365

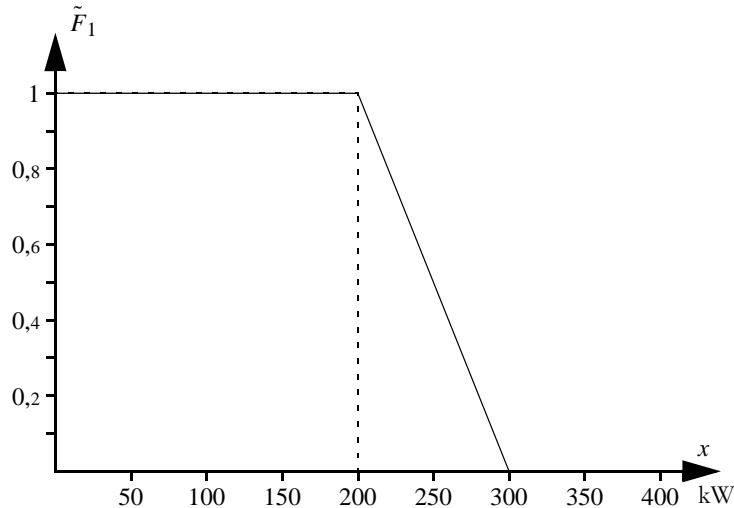
**Tabell 7** Beteckningar till AB Vattenkrafts planeringsproblem.

Beteckning	Förklaring	Värde
$\underline{S}_i$	Minsta tillåtna flöde genom laxtrappen vid magasin $i$	1
$\underline{W}_i$	Minsta tillåtna dygnsmedelvärde för flödet nedströms kraftverk $i$	10
$M_{i,0}$	Startinnehåll i magasin $i$	Se tabell 5
$\bar{M}_i$	Maximalt innehåll i magasin $i$	Se tabell 5
$\mu_{i,j}$	Marginell produktions-ekvivalent i kraftverk $i$ , segment $j$	Se tabell 5
$\bar{Q}_{i,j}$	Maximal tappning i kraftverk $i$ , segment $j$	Se tabell 5
$V_i$	Lokal tillrinning till magasin $i$	Se tabell 5
$\lambda_t$	Förväntat pris på ElKräng timme $t$	Se tabell 6
$\lambda_f$	Förväntat framtida elpris	400

## Uppgift 9 (20 p)

Ekyaro är en liten stad i Östafrika. Staden är inte ansluten till något nationellt elnät, utan man har ett eget lokalt system som försörjs av ett vattenkraftverk, ett vindkraftverk och en diesलगenerator. Vattenkraftverket har en installerad effekt på 200 kW och det finns alltid tillräckligt med vatten för full produktion. Risken för driftstörningar i vattenkraftverket är försumbar. Driftskostnaderna i vattenkraften och vindkraften är försumbara. Elproduktionen i vindkraftverket är likformigt fördelad mellan 0 och 100 kW. Diesलगeneratorn har en kapacitet på 100 kW, tillgängligheten är 90% och driftkostnaden är 6  $\text{€}/\text{kWh}$ .

Figuren nedan visar varaktighetskurvan för lasten i Ekyaro. Lasten är inte priskänslig och överföringsförlusterna i det lokala elnätet kan försummas.



- a) (5 p) Hur stor är risken för effektbrist då diesलगeneratorn inte är tillgänglig?
- b) (1 p) Hur stor är risken för effektbrist då diesलगeneratorn är tillgänglig?
- c) (1 p) Vad har systemet för *LOLP*?
- d) (5 p) Vad har systemet för *ETOC*?
- e) (8 p) Hur noggranna är dina beräkningar i uppgift a–d? Beskriv dels vilka felkällor som finns och hur du skulle ha kunnat förbättra dina beräkningar om du hade haft mer tid och större beräkningskapacitet till förfogande.

OBS! För att få full poäng på denna uppgift krävs både motivering och detaljer. Att t.ex. svara ”Beräkningarna är inte särskilt noggranna, men hade kunnat förbättras genom att använda en variansreduceringsteknik” ger inga poäng.

Tabell 8 Några slumpstal från en  $U(0, 1)$ -fördelning.

0,76	0,39	0,17	0,03	0,05	0,82	0,32	0,03	0,38	0,80
0,74	0,66	0,71	0,28	0,10	0,69	0,95	0,44	0,77	0,19



KTH Elektro-  
och systemteknik

## Svarsblad till del I

Namn: .....

Personnummer: .....

### Uppgift 1

a) Alternativ ..... är korrekt.

b) Alternativ ..... är korrekt.

c) Alternativ ..... är korrekt.

### Uppgift 2

a) ..... TWh/år    b) ..... TWh/år

c) .....  $\varnothing$ /MWh

### Uppgift 3

a) ..... Hz    b) ..... Hz

c) ..... Hz

### Uppgift 4

a) .....

.....

b) .....

c) ..... timmar

### Uppgift 5

a) ..... kWh/h    b) ..... kWh/h

c) .....  $\varnothing$ /h    d) ..... %

e) ..... kW    f) ..... %

### Uppgift 1

- a) 1, b) 2, c) 2.

### Uppgift 2

- a) Den del av kolkondensen som har en lägre driftkostnaden än elpriset 380  $\text{€}/\text{MWh}$  kommer att utnyttjas, d.v.s.  $(380 - 300)/(500 - 300) \cdot 20 = 8 \text{ TW/h/år}$ .
- b) Eftersom elpriset är lägre i Rike än i Maa så utnyttjas förbindelsen mellan Rike och Maa maximalt (om det inte hade funnits någon transmissionsbegränsning hade man haft samma elpris i bägge länderna). Vid elpriset 380  $\text{€}/\text{MWh}$  är den totala elproduktionen 50 (vattenkraft) + 32 (kärnkraft) + 8 (kolkondens) = 90 TW/h, medan elförbrukningen är 80 TW/h/år. Överskottet exporteras till Maa. Alltså kan vi dra slutsatsen att den maximala överföringskapaciteten är 10 TW/h/år.
- c) Till att börja med importerar Maa 10 TW/h från Rike. Vattenkraften och kärnkraften kan bidra med ytterligare 53 TW/h. Kolkondensen måste då producera 12 TW/h. Detta innebär att man utnyttjar 60% av kolkondenskapaciteten och därmed måste elpriset vara 420  $\text{€}/\text{MWh}$ .

### Uppgift 3

- a) Då frekvensen är 50,04 Hz produceras 11 400 MW (enligt figuren). Då lasten minskar med 100 MW måste elproduktionen minska till 11 300 MW, vilket innebär att frekvensen måste öka till 50,05 Hz.
- b) Då frekvensen är 50,04 Hz produceras 11 400 MW (enligt figuren). Då vindkraftproduktionen ökar med 100 MW måste den övriga elproduktionen minska till 11 300 MW, vilket innebär att frekvensen måste öka till 50,05 Hz.
- c) Då frekvensen är 49,96 Hz produceras 12 200 MW (enligt figuren). Då lasten minskar med 1 100 MW måste elproduktionen minska till 11 100 MW, vilket innebär att frekvensen måste öka till 49,99 Hz.

### Uppgift 4

- a) maximera 
$$\sum_{t=1}^{24} \left( \lambda_t (r_t - p_t) - \sum_{g=1}^3 (C_g^{+,t} + C_g^{-,t} + \beta G_g G_{g,t}) \right)$$
- b) 
$$\sum_{g=1}^3 G_{g,t} + W_t + p_t = D_t + r_t$$
- c) Tappningen vid installerad effekt ges av sambandet  $Q = H/\lambda(Q) = 200/0,8 = 250 \text{ TE}$ . Eftersom magasinet rymmer 1 800 000/3 600 = 500 TE så räcker ett fullt magasin till två timmars maximal produktion.

### Uppgift 5

- a) Den förväntade icke-levererade energin ges av

$$EENS_3 = \int_0^{\infty} \tilde{F}_3(x) dx = \int_0^{800} \tilde{F}_3(x) dx - \int_0^{800} \tilde{F}_3(x) dx + \int_0^{800} \tilde{F}_3(x) dx = 660,0 - 647,8 = 12,2 \text{ kWh/h.}$$

- b) Den sammanlagda elproduktionen ges av

$$EG_{23} = EENS_1 - EENS_3 = \int_0^{\infty} \tilde{F}_1(x) dx - EENS_3 = \int_0^{\infty} \tilde{F}_1(x) dx - \int_0^{400} \tilde{F}_1(x) dx - EENS_3 = 600,0 - 399,9 - 12,2 = 187,9 \text{ kWh/h.}$$

- c) Den förväntade totala driftkostnaden ges av

$$ETOC = 10EG_{23} = 10 \cdot 187,9 = 1 879 \text{ €/h.}$$

- d) Risken för effektbrist ges av

$$LOLP = \tilde{F}_3(800) = 15,3\%$$

- e) Normalfördelningen är symmetrisk vilket betyder att om  $D = \mu + X$  så är  $D^* = \mu - X$ . I det här fallet har normalfördelningen medelvärdet 600 (vilket man kan sluta sig till antingen genom att observera att  $F_0(600) = 0,5$  eller genom att  $EENS_0 = 600$ ). Således måste slumpvariabelkomplementet vara 800 kW.

- f) Enligt uppgiftshydelsen har vi följande skattningar för respektive stratum:  $m_{LOL1} = 0$ ,  $m_{LOL2} = 0,46$  och  $m_{LOL3} = 1$ . Alltså får vi

$$m_{LOLO} = \sum_{h=1}^3 \omega_h m_{LOLoh} = 0 + 0,05 \cdot 0,46 + 0,15 \cdot 1 = 17,3\%$$

### Uppgift 6

- a) Från maj till juli tror man att vindkraft, vattenkraft och kärnkraft kan producera sammanlagt 141 TW/h de närmaste tolv månaderna, samtidigt som lasten är 150 TW/h. Det skulle då behövas 9 TW/h elproduktion från fossila bränslen, vilket motsvarar 45% av prisintervall - alltså blir elpriset 390  $\text{€}/\text{MWh}$  under denna period.

I augusti och september tror man att vindkraft, vattenkraft och kärnkraft kan producera sammanlagt 133 TW/h de närmaste tolv månaderna. Det skulle då behövas 17 TW/h elproduktion från fossila bränslen, vilket motsvarar 85% av prisintervall - alltså blir elpriset 470  $\text{€}/\text{MWh}$  under denna period.

I oktober och november tror man att vindkraft, vattenkraft och kärnkraft kan producera sammanlagt 147 TW/h de närmaste tolv månaderna. Det skulle då behövas 3 TW/h elproduktion från fossila bränslen, vilket motsvarar 15% av prisintervall - alltså blir elpriset 330  $\text{€}/\text{MWh}$  under denna period.

- b) Genom att avsiktligt dra ner produktionskapaciteten i Strålinge 2 kan bolaget höja elpriset, samtidigt som man naturligtvis fördrar en viss del av intäkterna. Frågan är om elprishöjningen är tillräckligt stor för att kompensera de fördrade intäkterna.

I prognosen för augusti skulle elmarknadens aktörer nu räkna med 61,9 TW/h kärnkraft, vilket innebär att det behövs 17,1 TW/h elproduktion från fossila bränslen. Detta motsvarar 85,5% av

pristintervaller och alltså blir det nya elpriset 471 ¢/MWh i augusti och september (prognosen för oktober är oförändrad och således är priset fr.o.m. oktober detsamma som tidigare). Det höjda elpriset ger bolaget en ökad intäkt på  $1,0 \text{ TWh} \cdot 1 \text{ ¢/MWh} = 1 \text{ M}€$ . Produktionsminskningen i Strålinge 2 innebär att man förlorar inkomsten från 0,1 TWh som annars hade sålts för 470 ¢/MWh, samtidigt som man sparar in den rörliga produktionskostnaden på 100 ¢/MWh. Intäktsförlusten blir därmed  $0,1 \text{ TWh} \cdot (470 - 100) \text{ ¢/MWh} = 37 \text{ M}€$ . Således skulle det inte vara lönsamt för bolaget att försöka manipulera elpriset på detta vis.

## Uppgift 7

a) Om ett fel inträffar på likströmsledningen kommer flödet i stället att styras över till växelströmsledningen. Om ett fel inträffar på en av växelströmsledningarna kommer flödet att fördelas på de övriga sju växelströmsledningarna (flödet på likströmsledningen ändras inte i detta fall). I bägge fallen måste det finnas ledig kapacitet på växelströmsledningarna för att ta hand om ytterligare 500 MW. För att klara bortfall av en ledning får överföringen således inte överstiga 7 · 500 (växelströmsledningarna) + 500 (likströmsledningen) = 4 000 MW.

Av dessa 4 000 MW måste en del reserveras för primärregleringen. Om hela primärregleringsreserven i norra Rike ska kunna exporteras söderut så behöver man en reserv på totalt 2 500 MW/Hz · 0,1 Hz (normaldrifreserven) + 2 000 MW/Hz · 0,4 Hz (störningsreserven) = 1 050 MW. Elmarknadens aktörer kan således maximalt få tillgång till 2 950 MW överföringskapacitet.

b) Med det föreslagna styrsystemet kan man kontrollera hur effektfölo det fördelar sig mellan växelströmsförbindelserna och likströmsförbindelserna vid olika frekvenser. I det här fallet har dock denna fördelning ingen betydelse; då frekvensen är 49,5 Hz ska man fortfarande kunna överföra 1 050 MW utan att det totala flödet överstiger 4 000 MW.

## Uppgift 8

a) I ord kan planeringsproblemet formuleras som

maximera  $\text{värdet av } s_{i,t} \text{ el } + \text{värdet av sparat vatten,}$   
 med hänsyn till  $\text{hydrologisk balans för Språnget och Fallet,}$   
 $\text{minimiflöde genom älven.}$

### Index för kraftverk

Språnget 1, Fallet 2.

### Parametrar

Parametrarna är definierade i tabell 7 i uppgiftslydelsen.

### Optimeringsvariabler

$Q_{i,j,t}$  = tappning i kraftverk  $i$ , segment  $j$ , under timme  $t$ ,  $i = 1, 2, j = 1, 2, t = 1, \dots, 24$ ,  
 $S_{i,t}^+$  = spill från magasin i under timme  $t$ ,  $i = 1, 2, t = 1, \dots, 24$ ,  
 $M_{i,t}$  = innehåll i magasin  $i$  vid slutet av timme  $t$ ,  $i = 1, 2, t = 1, \dots, 24$ .

### Målfunktion

$$\text{maximera } \sum_{t=1}^{24} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mu_{i,j} Q_{i,j,t} + \lambda_j (\mu_{1,1} + \mu_{2,1}) M_{1,24} + \mu_2 (M_{2,24})$$

### Bivillkor

Hydrologisk balans för Språnget:

$$M_{1,t} = M_{1,t-1} - Q_{1,1,t} - Q_{1,2,t} - S_{1,t} + V_{1,t} \quad t = 1, \dots, 24.$$

Hydrologisk balans för Fallet:

$$M_{2,t} = M_{2,t-1} - Q_{2,1,t} - Q_{2,2,t} - S_{2,t} + Q_{1,1,t} + Q_{1,2,t} + S_{1,t} + V_{2,t} \quad t = 1, \dots, 24.$$

Minsta dygnsmedelvärde för flödet i älven:

$$\frac{1}{24} \sum_{t=1}^{24} (Q_{1,1,t} + Q_{1,2,t} + S_{1,t}) \geq \bar{W}_p, \quad i = 1, 2, t = 1, \dots, 24.$$

### Variabelgränser

$$0 \leq Q_{i,j,t} \leq \bar{Q}_{i,j}, \quad i = 1, 2, j = 1, 2, t = 1, \dots, 24,$$

$$S_{i,t}^+ \leq S_{i,t}, \quad i = 1, 2, t = 1, \dots, 24,$$

$$0 \leq M_{i,t} \leq \bar{M}_i, \quad i = 1, 2, t = 1, \dots, 24.$$

b) Till att börja med måste vi införa nya variabler för driftstatus samt start av vattenkraftverken:

$$s_{i,t}^+ = \text{start av kraftverk } i \text{ i början av timme } t, t = 1, \dots, 24,$$

$$u_{i,t} = \text{driftstatus för kraftverk } i \text{ under timme } t, t = 1, \dots, 24.$$

Målfunktionen behöver inte ändras. Däremot måste vi inkludera det vatten som förloras vid start i de hydrologiska balanserna:

$$M_{1,t} = M_{1,t-1} - Q_{1,1,t} - Q_{1,2,t} - S_{1,t} - \xi_1^+ s_{1,t}^+ + V_{1,t}, \quad t = 1, \dots, 24,$$

$$M_{2,t} = M_{2,t-1} - Q_{2,1,t} - Q_{2,2,t} - S_{2,t} - \xi_2^+ s_{2,t}^+ + V_{2,t} + Q_{1,1,t} + Q_{1,2,t} + S_{1,t} + \xi_1^+ s_{1,t}^+, \quad t = 1, \dots, 24.$$

Det vatten som förloras vid start ska också inkluderas i dygnsmedelflödet:

$$\frac{1}{24} \sum_{t=1}^{24} (Q_{1,1,t} + Q_{1,2,t} + S_{1,t} + \xi_1^+ s_{1,t}^+) \geq \bar{W}_p, \quad i = 1, 2, t = 1, \dots, 24.$$

Dessutom behövs nya bivillkor som reglerar sambandet mellan driftstatus samt start av vattenkraftverken:

$$s_{i,t}^+ \geq u_{i,t} - u_{i,t-1}$$

Det behövs också nya bivillkor som blockerar tappning i kraftverken då de ej är i drift:

$$Q_{i,j,t} \leq u_{i,t} \bar{Q}_{i,j}, \quad i = 1, 2, j = 1, 2, t = 1, \dots, 24.$$

Slutligen behöver vi ange variabelgränserna för de nya variablerna:

$$s_{i,t}^+ \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, t = 1, \dots, 24,$$

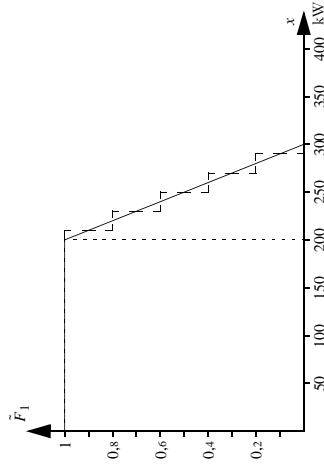
$$u_{i,t} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, t = 1, \dots, 24.$$

### Uppgift 9

- a) Vi kan notera att utan dieselgeneratorn är både tillgänglig produktionskapacitet och last  $U(200, 300)$ -fördelade. Sannolikheten att den ena är större än den andra är då 50%, vilket innebär att risken för effektbrist är 50% utan dieselgeneratorn.
- b) Då dieselgeneratorn fungerar som den ska kan vattenkraften och dieselgeneratorn leverera 300 kW, vilket alltid är tillräckligt för att täcka lasten. Risken för effektbrist är med andra ord 0% i detta fall.
- c) Sannolikheten att dieselgeneratorn inte fungerar är 10% och då är det 50% chans att det uppstår effektbrist. Systemets *LOLP* är således 5%.
- d) För att beräkna den förväntade driftkostnaden i systemet behöver vi den förväntade elproduktionen i dieselgeneratorn. Denna kan beräknas enligt

$$EG_g = T \cdot P_g \int_{G_g^{min}}^{G_g^{max}} F_{g-1}(x) dx.$$

I det här fallet önskar vi beräkna driftkostnaden per timme (d.v.s.  $T = 1$ ). Dieselgeneratorns tillgänglighet är 0,9 enligt uppgiften. Det vi saknar är således varaktighetskurvan för den ekvivalenta lasten inklusive bortfall i vattenkraftverket och vindkraftverket för intervallet 300 (installerad effekt i systemet exklusive dieselgeneratorn) till 400 (installerad effekt inklusive dieselgeneratorn). För att beräkna denna kurva väljer vi att använda diskreta approximationer av de kontinuerliga sannolikhetsfördelningarna för last och vindkraftproduktion. En enkel approximation är att använda fem lika sannolika tillstånd för var och en av fördelningarna. Lastens varaktighetskurva delas då in i segment med en storlek på 20 kW och för att undvika att ändra ytan under varaktighetskurvan bör gränserna mellan dessa segment ligga på 210, 230, 250, 270 och 290 kW, så som visas i figuren nedan.



På motsvarande vis approximeras bortfallet i vindkraftverket med fem tillstånd (10, 30, 50, 70 och 90 kW) med 20% sannolikhet vardera.

Den förväntade totala driftkostnaden kan nu beräknas på följande vis:

$$\tilde{F}_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 210, \\ 0,8 & 210 \leq x < 230, \\ 0,6 & 230 \leq x < 250, \\ 0,4 & 250 \leq x < 270, \\ 0,2 & 270 \leq x < 290, \\ 0 & 290 \leq x, \end{cases} \quad \tilde{F}_1(x) = 1 \cdot \tilde{F}_0(x),$$

$$\tilde{F}_2(x) = \begin{cases} 0,2 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,4 & 300 \leq x < 320, \\ 0 + 0,2 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,6 = 0,24 & 320 \leq x < 340, \\ 0 + 0 + 0,2 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,4 = 0,12 & 340 \leq x < 360, \\ 0 + 0 + 0 + 0,2 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,04 & 360 \leq x < 380, \\ 0 & 380 \leq x, \end{cases} \dots$$

$$ETOC = 6EG_3 = 6 \cdot 0,9 \int_{300}^{400} \tilde{F}_2(x) dx = 6 \cdot 0,9 \cdot 20 \cdot (0,4 + 0,24 + 0,12 + 0,04) = 86,4 \text{ ¢/h}.$$

- e) De ovan givna lösningarna till uppgift a-c bygger på analytiska beräkningar. I dessa fall beror noggrannheten i svaret endast av hur bra indata man har till modellen. I d-uppgiften använde oss av diskreta approximationer av kontinuerliga stokastiska variabler, vilket innebär att vi introducerar ett numeriskt fel i beräkningarna. Detta fel minskar ju fler tillstånd vi använder i de diskreta approximationerna (d.v.s. ju kortare segment vi använder).