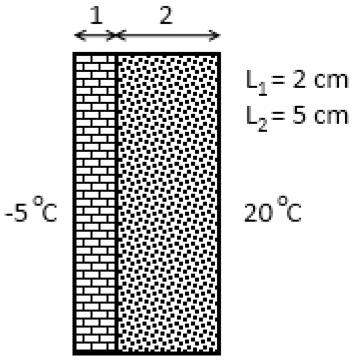
7.2 – Vägg med isolering (1D)



En vägg befinner sig i flödesjämvikt (steady state) en vinterdag. Väggen består av 2 cm "yttermaterial" och 5 cm isolering.

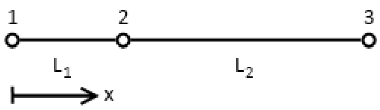
Givet: $k_1 = 0.2\left[{}^{W}\!/_{cmK}\right]$, $k_2 = 0.06\left[{}^{W}\!/_{cmK}\right]$

$h = 0.1\left[{}^{W}\!/_{cm^2K}\right]$ på ytan som kyls av den kalla luften

Sökt: Temperaturprofil genom väggen och värmeförlusten per area när systemet är i steady state.

Lösning:

Strukturen modelleras med två element:



FEM-ekvationen för värmetransport blir $\mathbf{K}_e\mathbf{T}_e = \mathbf{F}_e$. I det här fallet (1D) gäller:

$$\mathbf{K}_{ei} = \underbrace{\int_{l_e} \mathbf{B}^T k_i A \mathbf{B} dx}_{\substack{\mathbf{K}_{vl} \\ (\text{värmeledning})}} + \underbrace{\int_{l_e} \mathbf{N}^T h_s P \mathbf{N} dx}_{\substack{\mathbf{K}_{k} \\ (\text{konvektion längs element})}} + \underbrace{\begin{bmatrix} h_{ir1}A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{K}_{r1} \\ (\text{konvektion nod 1})}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ir2}A \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{K}_{r2} \\ (\text{konvektion nod 2})}} \tag{1}$$

$\mathbf{K}_{r1}, \mathbf{K}_{r2}$ *tas med för respektive randnod om värmet förs bort via konvektion (luftflöde) istället för konduktion (ledning). Notera att det mycket väl kan vara, och oftast faktiskt är, olika h vid olika ränder eftersom h beror på temperatur, fluidens viskositet, geometri, etc.*

$$\mathbf{F}_e = \underbrace{\int_{l_e} \mathbf{N}^T q A dx}_{\substack{\text{värmegeneration} \\ \mathbf{F}_b}} + \underbrace{\int_{l_e} \mathbf{N}^T h_s P T_\infty dx}_{\substack{\text{konvektionsvärme} \\ \mathbf{F}_s}} + \underbrace{\begin{bmatrix} h_{r1}AT_\infty \\ 0 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_{r1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ h_{r2}AT_\infty \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} 0 \\ -Q_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_{r2}} \tag{2}$$

$\mathbf{F}_r$ *sätts med sunt förnuft. Sätt* $h_r AT_\infty$ *om värmet transporteras över randen via konvektion,* Q_i *om via konduktion, det är antingen eller, inte båda. Notera tecknen för randvillkoret för värmeledning!*

Kuriosa: *Värmetransporten via strålning har försummats, vilket är helt ok. Om det lyser det rött eller om det är varmare ska strålningsbidraget definitivt tas med! T ex kyls glödtråden i glödlampor nästan uteslutande genom strålning.*

Kuriosa: *För många fluider är värmetransporten via värmeledning försumbar i jämförelse med konvektionsbidraget. Det kan bero på att fluiden är så lättflytande att mekanisk blandning transporterar värmen mycket snabbare än värmeledning. Om* *fluiden däremot är trögflytande, har svårt att strömma fritt (luften i en dunjacka), eller har en förhållandevis hög värmeledningsförmåga (metallsmältor), är ledning viktig för värmetransporten. Matematiskt sett är det inte markant skillnad. Man mäter bara värmeövergångstalet, h, och dunkar in det i beräkningarna som vanligt.*

Randvillkor:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 20[°C] \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}_{\mathrm{r}} = \begin{bmatrix} Q_1 = hAT_\infty \\ 0 \\ Q_3 = Q_R \end{bmatrix}$$

Nod 3 hålls på konstant temperatur, vilket tolkas som att man leder in precis så mycket värme som noden kyls, dvs ett "reaktionsflöde". Jämför T_i låst $\Rightarrow Q_i = Q_R \Leftrightarrow D_i$ låst $\Rightarrow F_i = R_i$.

Element 1:

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2] \qquad N_1 = 1 - \xi = 1 - \frac{x}{L_1} \qquad N_2 = \xi = \frac{x}{L_1}$$

$$\mathbf{B} = [B_1 \quad B_2] \qquad B_1 = \frac{dN_1}{dx} = -\frac{1}{L_1} \qquad B_2 = \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{L_1}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{vl}} = \int_{l_e} \mathbf{B}^T k_1 A \mathbf{B} dx = k_1 A \underbrace{\int_{l_e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx}_{\text{Formelblad}} = \frac{k_1 A}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A är arean av den bit av väggen vi modellerar.

Vi modellerar en del av en stor vägg, så i sidled (y- eller z-led), finns bara mer vägg. Det finns alltså ingen konvektiv kylning åt sidan.

$$\mathbf{K}_{\mathrm{k}} = \mathbf{0}$$

Nod 1 står i kontakt med den kalla vinterluften $\Rightarrow$ konvektion på rand. Ingen konvektion på nod 2.

$$\mathbf{K}_{\mathrm{r1}} = \begin{bmatrix} hA & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{\mathrm{r2}} = \mathbf{0}$$

$$(1) \Rightarrow \mathbf{K}_{\mathrm{e1}} = \underbrace{\frac{k_1 A}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{\mathrm{vl}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{\mathrm{k}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} hA & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{\mathrm{r1}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{\mathrm{r2}}} = A \begin{bmatrix} \frac{k_1}{L_1} + h & -\frac{k_1}{L_1} \\ -\frac{k_1}{L_1} & \frac{k_1}{L_1} \end{bmatrix}$$

Väggen är (förhoppningsvis) inte radioaktiv, och plasticeras inte, så ingen värme genereras i materialet.

$$q = 0 \Rightarrow \int_{l_e} \mathbf{N}^T qA dx = \mathbf{0} \tag{3}$$

Tidigare konstaterade vi att vi inte vi inte har konvektiv kylning i y- eller z-led.

$$\mathbf{K}_{\mathrm{k}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \int_{l_e} \mathbf{N}^T h_{\mathrm{s}} P T_\infty dx = \mathbf{0} \leftarrow \text{dessa två hör alltid ihop} \tag{4}$$

Notera att h_{s}, inte är detsamma som den givna h ! Varje yta har ett eget h, som kan bero på många parametrar.

Från randvillkoren vet vi att nod 1 kyls via konvektion, och nod 2 leder bort värme.

$$(2) \Rightarrow \mathbf{F}_{e1} = \cancel{\mathbf{F}_{b,1}} + \cancel{\mathbf{F}_{s,2}} + \mathbf{F}_{r1} + \mathbf{F}_{r2} = \begin{bmatrix} hAT_\infty \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hAT_\infty \\ -Q_2 \end{bmatrix}$$

Element 2:

Mycket är likt i element 1 och 2.

$$\mathbf{K}_{vl} = \frac{k_2 A}{L_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{0}$$

Ingen konvektion på varken nod 1 eller 2 $\Rightarrow \mathbf{K}_{r1} = \mathbf{K}_{r2} = \mathbf{0}$

$$(1) \Rightarrow \mathbf{K}_{e2} = \underbrace{\frac{k_2 A}{L_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{vl}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{r1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{r2}} = A\begin{bmatrix} \frac{k_2}{L_2} & -\frac{k_2}{L_2} \\ -\frac{k_2}{L_2} & \frac{k_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{b2} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F}_{e2} = \mathbf{F}_r = \begin{bmatrix} Q_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -Q_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_2 \\ -Q_R \end{bmatrix}$$

Assemblera:

$$\Rightarrow \mathbf{K} = A\begin{bmatrix} \frac{k_1}{L_1} + h & -\frac{k_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{k_1}{L_1} & \frac{k_1}{L_1} + \frac{k_2}{L_2} & -\frac{k_2}{L_2} \\ 0 & -\frac{k_2}{L_2} & \frac{k_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \begin{bmatrix} hAT_\infty \\ -Q_2 \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ Q_2 \\ -Q_R \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} hT_\infty \\ 0 \\ -Q_R/A \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{KT} = \mathbf{F} \Leftrightarrow A\begin{bmatrix} \frac{k_1}{L_1} + h & -\frac{k_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{k_1}{L_1} & \frac{k_1}{L_1} + \frac{k_2}{L_2} & -\frac{k_2}{L_2} \\ 0 & -\frac{k_2}{L_2} & \frac{k_2}{L_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 20[°C] \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} hT_\infty \\ 0 \\ -\frac{Q_R}{A} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \tag{5}$$

Obs! *Notera att $T_3 = 20[°C] \neq 0$, man får inte stryka rader och kolonner som vi tidigare gjort. Detta åtgärdas dock lätt med en snabb omskrivning.* ***Det här skulle motsvara en föreskriven förskjutning i hållf.-FEM.***

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{K} & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} k_{11}T_1 + k_{12}T_2 + k_{13}T_3 = F_1 \\ k_{21}T_1 + k_{22}T_2 + k_{23}T_3 = F_2 \\ k_{31}T_1 + k_{32}T_2 + k_{33}T_3 = F_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_{11}T_1 + k_{12}T_2 + k_{13}\cdot 0 = F_1 - k_{13}T_3 \\ k_{21}T_1 + k_{22}T_2 + k_{23}\cdot 0 = F_2 - k_{23}T_3 \\ k_{31}T_1 + k_{32}T_2 + k_{33}\cdot 0 = F_3 - k_{33}T_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{K} & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ k_{33} \end{bmatrix} \cdot T_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{k_1}{L_1} + h & -\frac{k_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{k_1}{L_1} & \frac{k_1}{L_1} + \frac{k_2}{L_2} & -\frac{k_2}{L_2} \\ 0 & -\frac{k_2}{L_2} & \frac{k_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hT_\infty \\ 0 \\ -\frac{Q_R}{A} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k_2}{L_2} \\ \frac{k_2}{L_2} \end{bmatrix} \cdot 20[°C] \tag{6}$$

Nu kan man ta fram sitt reducerade ekvationssystem precis som vanligt.

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_1}{L_1} + h & -\frac{k_1}{L_1} \\ -\frac{k_1}{L_1} & \frac{k_1}{L_1} + \frac{k_2}{L_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{red}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{red}} = \underbrace{\begin{bmatrix} hT_\infty \\ \frac{k_2}{L_2} \cdot 20[°C] \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_{red}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{red}^{-1}\mathbf{F}_{red} \approx \begin{bmatrix} -2.58 \\ -0.161 \end{bmatrix}[°C] \tag{7}$$

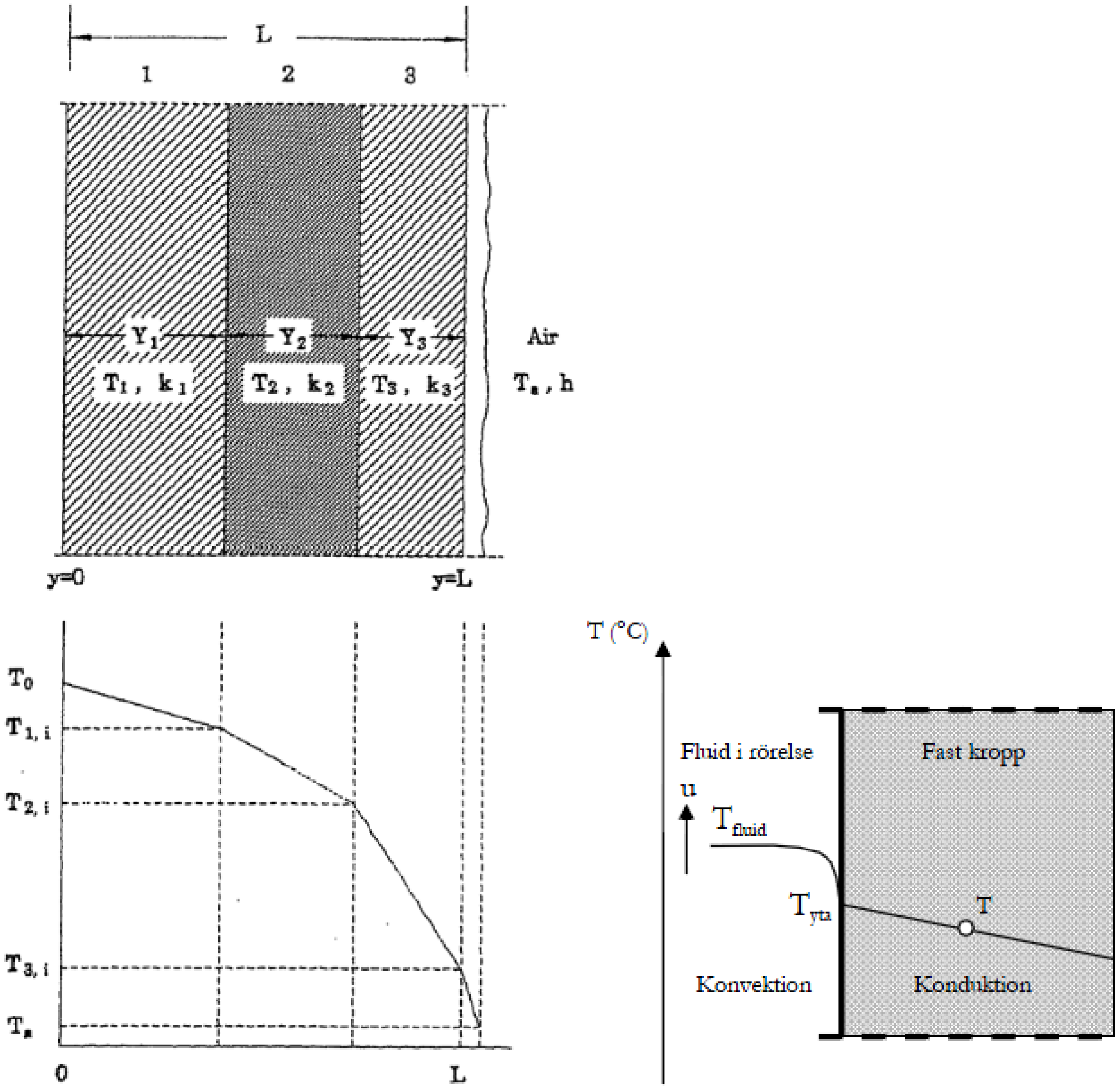
$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -2.58 \\ -0.161 \\ 20 \end{bmatrix}[°C]}} \tag{8}$$

Temperatur varierar linjärt mellan noderna (linjära element). Den exakta lösningen blir faktiskt också styckvis linjär.

$$(5) \Rightarrow -\frac{Q_R}{A} = -\frac{k_2}{L_2}(T_2) + \frac{k_2}{L_2}(T_3) \Leftrightarrow \frac{Q_R}{A} = -\frac{k_2}{L_2}(T_3 - T_2) \approx \underline{\underline{-0.242\left[W/cm^2\right]}} \tag{9}$$

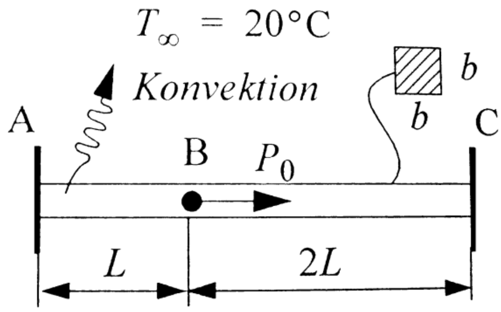
Värmeförlusten är det ”reaktionsvärme” som måste pumpas in i väggen för att hålla 20 °C. Det negativa tecknet betyder att värmeflödet är i negativ x-riktning.

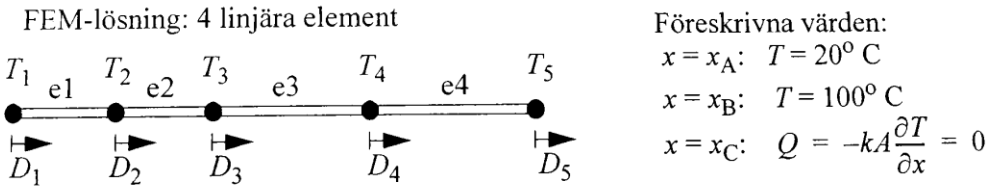
Såhär kan temperaturprofiler se ut i verkligheten vid steady state. Om man antar att värmeledningsförmågan är oberoende av temperatur så varierar temperaturen linjärt i solider, eller styckvis linjärt om det är flera lager, som i den här uppgiften.



Bilderna är snodda från Ragnhild Aunes föreläsningsanteckningar i kursen ”Transportfenomen”.

7.3 – Värme + Elasticitet





(a) Temperaturfördelningen, dela upp i två analyser eftersom T_3 är föreskriven.

Givet: $T_\infty = 20[°C], T_1 = 20[°C], T_3 = 100[°C]$

$P_0 = 2[kN]$

$h = 0.01\left[W/cm^2K\right]$

$k = 3.9\left[W/cmK\right]$

$\alpha = 1.8 \cdot 10^{-5}\left[K^{-1}\right]$

$E = 125[GPa]$

$L = 10[cm]$

$b = 1[cm]$

Sökt: a) Temperaturprofil vid steady state.
b) Förskjutningar och spänningar.

Lösning:

a) Temperaturprofil

Vi börjar med vänsterdelen, element 1 och 2. Båda elementen har samma geometri och värmeledningsförmåga.

$$\Rightarrow \mathbf{K}_{vl,1} = \mathbf{K}_{vl,2} = \frac{kA}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{kb^2}{L/2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Båda elementen kyls med konvektion från sidorna med samma värmeövergångstal.

$$\Rightarrow \mathbf{K}_{\mathrm{k},1} = \mathbf{K}_{\mathrm{k},2} = \int_{l_e} \mathbf{N}^T hP\mathbf{N}dx = h\underbrace{(4b)}_{P} \underbrace{\int_{l_e} \mathbf{N}^T\mathbf{N}dx}_{\text{Formelblad}} = \frac{2hbl_e}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{hbL}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{\mathrm{b},1} = \mathbf{F}_{\mathrm{b},2} = \int_{l_e} \mathbf{N}^T hPT_\infty dx = \left\{ dx = \frac{L}{2}d\xi \right\} = 2hbLT_\infty \int_0^1 \mathbf{N}^T d\xi = hbLT_\infty \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}_{\mathrm{b}} = hbLT_\infty \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Randnoderna <u>leder</u> bort sitt värme. Noder 1 och 3 har låst temperatur $\Rightarrow$ reaktionsflöde.

$$\mathbf{F}_{\mathrm{r},1} = \begin{bmatrix} Q_{R1} \\ -Q_2 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{\mathrm{r},2} = \begin{bmatrix} Q_2 \\ -Q_{R3} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}_{\mathrm{r}} = \begin{bmatrix} Q_{R1} \\ 0 \\ Q_{R3} \end{bmatrix}$$

Dags att slänga ihop delbidragen till elementmatriser och assemblera:

$$\mathbf{K}_{\mathrm{e}1} = \mathbf{K}_{\mathrm{e}2} = \frac{kb^2}{L/2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hbL}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{K} = \frac{kb^2}{L/2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hbL}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{K} \approx \begin{bmatrix} 0.85 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 1.7 & -0.75 \\ 0 & -0.75 & 0.85 \end{bmatrix}\left[\frac{W}{K}\right]$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathrm{b}} + \mathbf{F}_{\mathrm{r}} = hbLT_\infty \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{R1} \\ 0 \\ Q_{R3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}[W] + \begin{bmatrix} Q_{R1} \\ 0 \\ Q_{R3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 = 20[°C] \\ T_2 \\ T_3 = 100[°C] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{KT} = \mathbf{F} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0.85 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 1.7 & -0.75 \\ 0 & -0.75 & 0.85 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ T_2 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{R1} \\ 0 \\ Q_{R3} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Alternativ 1 – Vill man göra det allmänt kan man skriva om som i förra uppgiften och får då

$$(4) \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.85 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 1.69 & -0.75 \\ 0 & -0.75 & 0.85 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{R1} \\ 0 \\ Q_{R3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.85 \\ -0.75 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 20 - \begin{bmatrix} 0 \\ -0.75 \\ 0.85 \end{bmatrix} \cdot 100 ,$$

och härifrån kan man reducera sitt ekvationssystem som vanligt.

Alternativ 2 – Man kollar på rad 2 direkt:

$$(4) \Rightarrow -0.75 \cdot 20 + 1.69 \cdot T_2 - 0.75 \cdot 100 = 4 + 0 \Leftrightarrow T_2 = \frac{4 + 0.75 \cdot 20 + 0.75 \cdot 100}{1.69} \approx 55.6[°C]$$

Utan avrundningen i styvhetsmatrisen hade det blivit ≈ 55,276 °C, så vi använder det i framtida beräkningar som involverar på T_2. $\Rightarrow \underline{\underline{T_2 = 55.276[°C]}}$ (5)

För högerdelen är elementmatriserna i princip identiska som de vi just räknade ut, men $l_e = L$ nu.

$$\mathbf{K}_{e3} = \mathbf{K}_{e4} = \frac{kb^2}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2hbL}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{K} = \frac{kb^2}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2hbL}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{K} \approx \begin{bmatrix} 0.52 & -0.32 & 0 \\ -0.32 & 1.05 & -0.32 \\ 0 & -0.32 & 0.52 \end{bmatrix}\left[\frac{W}{K}\right]$$

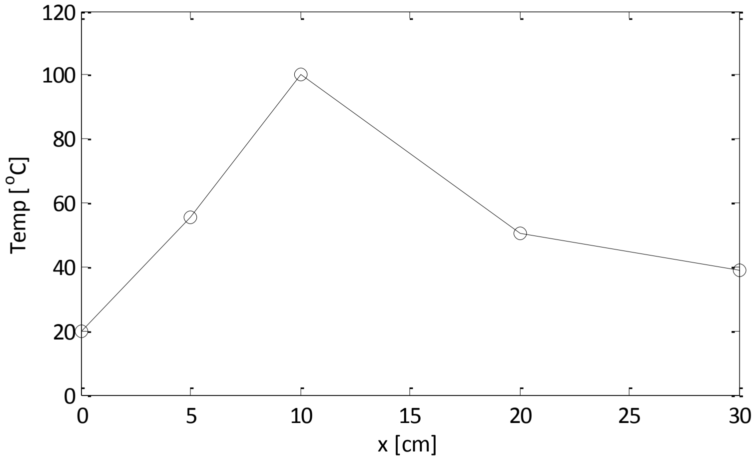
Nod 5 är isolerad $\Rightarrow Q_5 = 0$. Det här kan jämföras med fri nod i strukturanalys, D_i fri $\Rightarrow R_i = 0$.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mathrm{b} + \mathbf{F}_\mathrm{r} = hbLT_\infty \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{R3} \\ 0 \\ Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}[W] + \begin{bmatrix} Q_{R3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_3 = 100[°C] \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

Reducera systemet från $\mathbf{KT} = \mathbf{F} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1.05 & -0.32 \\ -0.32 & 0.52 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.32 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 100 \Leftrightarrow \{\text{utan avrundning}\} \Leftrightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.543 \\ 38.870 \end{bmatrix}[°C]}} \quad (6)$$



b) Förskjutningar och Spänningar

Randvillkoren ger oss:

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0\\D_2\\D_3\\D_4\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{F}_R=\begin{bmatrix}R_1\\0\\0\\0\\R_5\end{bmatrix},\mathbf{F}_{\text{nodlast}}=\begin{bmatrix}0\\0\\P_0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\2000\\0\\0\end{bmatrix}[N] \tag{7}$$

Beräkna styvhetsmatrisen:

$$\mathbf{K}_{e1}=\mathbf{K}_{e2}=\frac{Eb^2}{L/2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix},\mathbf{K}_{e3}=\mathbf{K}_{e4}=\frac{Eb^2}{L}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\mathbf{K}=\frac{Eb^2}{L}\begin{bmatrix}2&-2&0&0&0\\-2&4&-2&0&0\\0&-2&3&-1&0\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{K}_{red}=\frac{Eb^2}{L}\begin{bmatrix}4&-2&0\\-2&3&-1\\0&-1&2\end{bmatrix} \tag{8}$$

Lägg på termisk last (antag att stången var 20 °C när den spändes fast, $T_0=20[°C]$):

Från Jonas OH:

$$\mathbf{F}_{T,i}=\int_{l_e}\mathbf{B}^T EA\alpha(T-T_0)dx=Eb^2\alpha\int_0^1\underbrace{\frac{1}{l_e}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^T}\left[\underbrace{(1-\xi)T_1+\xi T_2}_{T(x)=\mathbf{NT}}-T_0\right]l_e d\xi=$$

$$=Eb^2\alpha\int_0^1\left[(T_1-T_0)+\xi(-T_1+T_2)\right]d\xi\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=Eb^2\alpha\left[(T_1-T_0)\xi+\frac{\xi^2}{2}(-T_1+T_2)\right]_0^1\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=$$

$$=Eb^2\alpha\left[(T_1-T_0)+\frac{1}{2}(-T_1+T_2)\right]\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

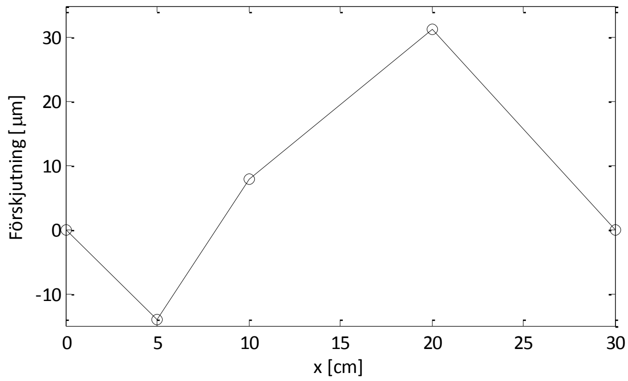
$$\Rightarrow\mathbf{F}_{T,i}=Eb^2\alpha\left(\frac{T_1+T_2}{2}-T_0\right)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mathbf{F}_T=Eb^2\alpha\begin{bmatrix}T_0-\frac{T_1+T_2}{2}\\ \frac{T_1+T_2}{2}-T_0+T_0-\frac{T_2+T_3}{2}\\ \frac{T_2+T_3}{2}-T_0+T_0-\frac{T_3+T_4}{2}\\ \frac{T_3+T_4}{2}-T_0+T_0-\frac{T_4+T_5}{2}\\ \frac{T_4+T_5}{2}-T_0\end{bmatrix}=Eb^2\alpha\begin{bmatrix}T_0-\frac{T_1+T_2}{2}\\ \frac{T_1-T_3}{2}\\ \frac{T_2-T_4}{2}\\ \frac{T_3-T_5}{2}\\ \frac{T_4+T_5}{2}-T_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3968.5\\-9000.0\\532.4\\6877.1\\5559.0\end{bmatrix}[N] \tag{9}$$

$$(7) \wedge (9) \Rightarrow \mathbf{F} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3968.5 \\ -9000.0 \\ 2532.4 \\ 6877.1 \\ 5559.0 \end{bmatrix} [N] \Rightarrow \mathbf{F}_{red} = \begin{bmatrix} -9000.0 \\ 2532.4 \\ 6877.1 \end{bmatrix} [N] \tag{10}$$

Lös det reducerade systemet:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \frac{L}{Eb^2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -9000.0 \\ 2532.4 \\ 6877.1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -14.0074 \\ 7.8453 \\ 31.4310 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} [m]}} \tag{11}$$



Notera hur materialet nära nod 3 expanderar av värmen. Resultatet blir att nod 2 och nod 4 flyttar sig bort från nod 3.

Beräkna spänningar

Här får man hålla koll på att förskjutningen består av både elastisk och termisk töjning. Det är bara den elastiska töjningen som är kopplat mekaniska spänningar, så all töjning som orsakats av termisk utvidgning måste dras bort innan Hookes lag kan användas.

$$\sigma_i = E\left(\varepsilon_i - \varepsilon_{T,i}\right) = E\left(\mathbf{Bd}_{e,i} - \alpha\overline{\Delta T_i}\right) = E\left(\frac{D_2 - D_1}{l_e} - \alpha\overline{\Delta T_i}\right),$$

där $\overline{\Delta T_i} = \frac{T_1 + T_2}{2} - T_0$ är elementets genomsnittliga temperaturökning.

$$\Rightarrow \sigma_i = E\left[\frac{D_2 - D_1}{l_e} - \alpha\left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0\right)\right] \tag{12}$$

Sätt in nodförskjutningar och nodtemperaturer för respektive element. $\Rightarrow$
Kolla enheterna när ni sätter in längderna, lätt att råka sätta in saker i cm.

$\sigma_1 = \sigma_2 = -74{,}9[MPa]$
$\underline{\underline{\sigma_3 = \sigma_4 = -94{,}9[MPa]}}$

Det här var mina sista övningsanteckningar. Hoppas ni haft hjälp av dem, och lycka till på tentan.
//Rickard Shen

Bilaga – Formler i värmetransport 1D

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_e}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\xi) = \mathbf{NT} = \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

"Styvhetsmatris"

$$\mathbf{K}_{ei} = \mathbf{K}_{\mathrm{vl}} + \mathbf{K}_{\mathrm{k}} + \mathbf{K}_{\mathrm{r}1} + \mathbf{K}_{\mathrm{r}2}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{vl}} = \int_{l_e} \mathbf{B}^T k_i A \mathbf{B} dx$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{k}} = \int_{l_e} \mathbf{N}^T h_{ik} P \mathbf{N} dx$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{r}1} = \begin{bmatrix} h_{\mathrm{r}1}A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{om konvektion vid randnod 1}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{r}2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{\mathrm{r}2}A \end{bmatrix} \text{ om konvektion vid randnod 2}$$

"Lastvektor"

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_{r1} + \mathbf{F}_{r2}$$

$$\mathbf{F}_b = \begin{cases} \text{om det genereras värme i materialet: } \int_{l_e} \mathbf{N}^T q A dx \\ \text{konvektion ut från sidan: } \int_{l_e} \mathbf{N}^T h_{ik} P T_\infty dx \end{cases}$$

$$\mathbf{F}_{r1} = \begin{bmatrix} h_{ir1} A T_\infty \\ 0 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{r2} = \begin{bmatrix} 0 \\ h_{ir2} A T_\infty \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} 0 \\ -Q_2 \end{bmatrix}$$