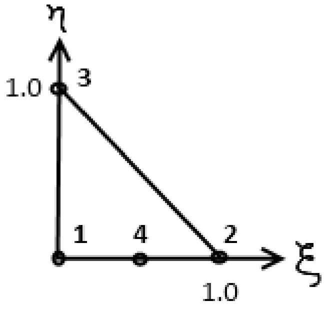
6.2 – Transitionselement



Den här typen av element används för förbinda ett linjärt och ett kvadratiskt element.

Givet: $N_1 = 1 - \xi\left(3 - 2(\xi+\eta)\right) - \eta = 1 - 3\xi + 2\xi^2 + 2\xi\eta - \eta$

$$N_2 = \xi\left(2(\xi+\eta) - 1\right) = -\xi + 2\xi^2 + 2\xi\eta$$

$$N_3 = \eta$$

Sökt: Bestäm formfunktionen för nod 4. Visa att den uppfyller kraven för en formfunktion.

Lösning:

Krav för formfunktioner:

1. $\sum N_i = 1$ i varje punkt i elementet. (1)
2. Formfunktionen ska vara 1 i sin hemmanod. (2)
3. Formfunktionen ska vara 0 i alla andra noder i elementet. (3)

Metod 1 – Snabbast och enklast om man redan vet resterande formfunktioner:

$$(1) \Rightarrow N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\left(1 - 3\xi + 2\xi^2 + 2\xi\eta - \eta\right)}_{N_1} + \underbrace{\left(-\xi + 2\xi^2 + 2\xi\eta\right)}_{N_2} + \underbrace{(\eta)}_{N_3} + N_4 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4\xi + 4\xi^2 + 4\xi\eta + N_4 = 1 \Leftrightarrow N_4 = 4\xi - 4\xi^2 - 4\xi\eta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{N_4(\xi,\eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta)}} \qquad (4)$$

Kontroll av krav 2: $N_4\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 4\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} - 0\right) = 1$, ok!

Kontroll av krav 3: $N_4 = 0$ vid andra noder, ok!

Metod 2 – Som i övning 5, inte alltid så straight forward tyvärr.

Gör en smart ansats, håll tummarna och testa om det uppfyller kraven. Om man sätter kravet att $N_4 = 0$ längs med vänsterkanten och diagonalen kommer man en bra bit på ansatsen. Detta uppfyller krav 3 direkt. Genom att slänga på en konstant kan vi också uppfylla krav 2.

Formfunktionen är 0 längs med hela kanten om noden inte ligger på kanten. Det vore ju skumt om en nod skulle få en konsekvent nodlast av en ytlast som ligger på en yta där noden inte ligger. Se även plottarna.

Vänsterkant: $\xi = 0 \Rightarrow$ inkludera faktorn $(0-\xi)$

Diagonal: $\eta = 1-\xi \Rightarrow$ inkludera faktorn $\left[(1-\xi)-\eta\right]$

Från ansatsen har vi formen på formfunktionen, men ”amplituden” måste bestämmas.

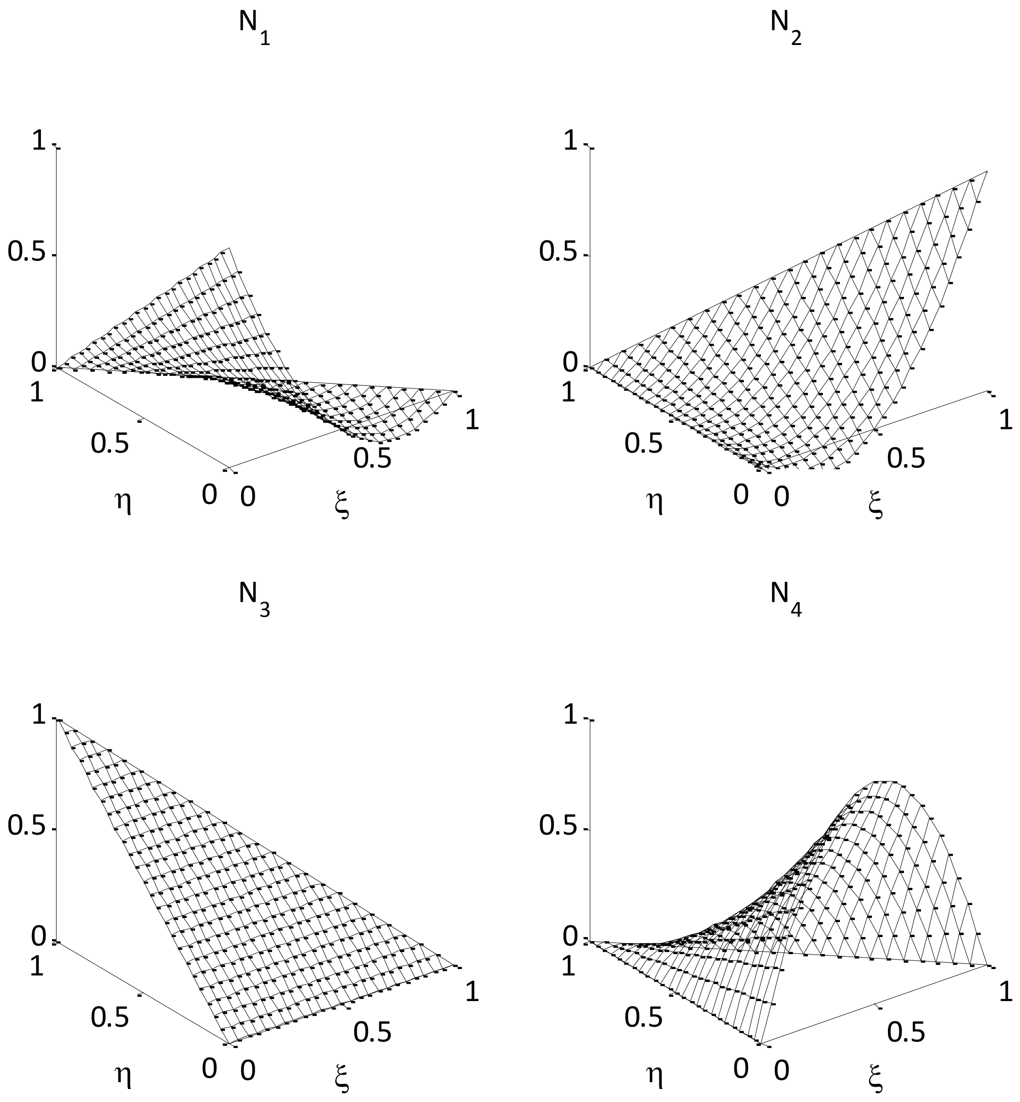
Jämför $\sin(x) \leftrightarrow k\sin(x)$.

$N_4(\xi,\eta) = -k\xi(1-\xi-\eta)$.

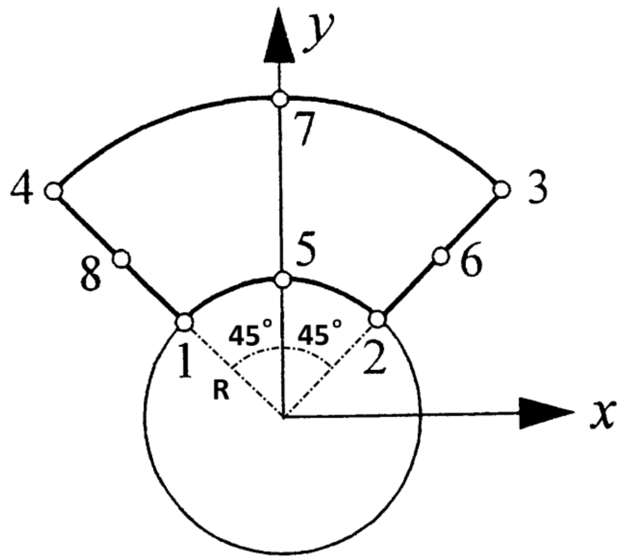
(2) $\Rightarrow N_4\left(\frac{1}{2},0\right) = 1 \Rightarrow -k\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-0\right) = 1 \Leftrightarrow k = -4 \Rightarrow \underline{\underline{N_4(\xi,\eta) = 4\xi(1-\xi-\eta)}}$

Krav 1 är uppenbarligen också uppfyllt eftersom vi får samma svar som i metod 1, som utgick från krav 1.

Formfunktionerna plottade i MATLAB:



6.3 – Koordinatomvandling i isoparametriskt element



Givet: Hålradie, R

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \qquad N_2 = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$$

$$N_3 = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) \qquad N_4 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \qquad N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \qquad N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

Sökt: Bestäm avståndet från mitten till punkten $(x_0, y_0) \Leftrightarrow (\xi_0, \eta_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$ och jämför med sanna värdet R.

Lösning:

Avståndet, d , från $(0,0) \to (x_0, y_0) = \sqrt{(x_0-0)^2 + (y_0-0)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. (1)

Koordinaterna (x_0, y_0) är givna i lokala koordinatsystemet som (ξ_0, η_0) och måste transformeras. För isoparametriska element gäller att:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum N_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \tag{2}$$

Vi är intresserade av punkten (x_0, y_0), eller (ξ_0, η_0) lokalt sett, så:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \sum N_i \big|_{\xi=\xi_0, \eta=\eta_0} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \tag{3}$$

Räkna ut formfunktionernas värden i den intressanta punkten $\left(\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \eta_0 = -1\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow N_1 = -\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right) = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow N_2 = -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1+1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right) = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow N_5 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)(1+1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow N_3 = N_4 = N_6 = N_7 = N_8 = 0 \leftarrow \text{innehåller } (1+\eta)$$

Rimlighetskontroll: $\sum N_i = \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)+2}{4} = \frac{4}{4} = 1$, ok!

Tack vare att bara tre noder har nollskilda formfunktioner behöver vi bara ta fram koordinaterna för de tre.

Koordinaterna fås ur figuren med lite trigonometri.

Nod	1	2	5
x	$R\cos(135°) = -R\frac{\sqrt{2}}{2}$	$R\cos(45°) = R\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
y	$R\sin(135°) = R\frac{\sqrt{2}}{2}$	$R\sin(45°) = R\frac{\sqrt{2}}{2}$	R

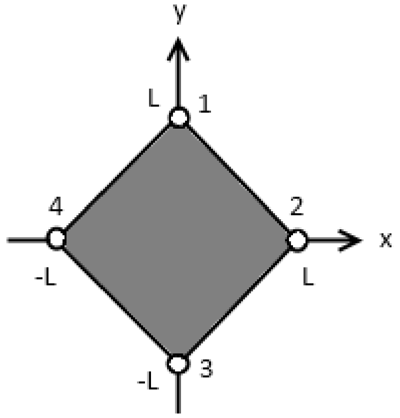
$$\Rightarrow x_0 = N_1x_1 + N_2x_2 + N_5x_5 = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)\left(-R\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{R}{2} \tag{4}$$

$$\Rightarrow y_0 = N_1y_1 + N_2y_2 + N_5y_5 = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot R = R\underbrace{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}_{\approx 0.85355339} \tag{5}$$

(1) $\Rightarrow d = R\sqrt{0,5^2 + 0,85355339^2} \Rightarrow \underline{\underline{d \approx 0.989R}}$

Det här innebär att FEM-nätet avviker från det man försöker modellera med ca 1%, vilket felfortplantas till de töjningar och spänningar man beräknar med FEM. Vill man vara säker på sin FEM-lösning ska man alltid göra en finare mesh för att se att man fortfarande får samma resultat.

6.4 – ”Fel” numrering



Isoparametriskt element numrerad i omvänd ordning mot konvention, dvs. medurs.

Givet: Element som ovan.

Sökt: Jacobideterminanten

Lösning:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{J}| = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{1}$$

$$\begin{cases} N_1 = (1-\xi)(1-\eta)/4 \\ N_2 = (1+\xi)(1-\eta)/4 \\ N_3 = (1+\xi)(1+\eta)/4 \\ N_4 = (1-\xi)(1+\eta)/4 \end{cases} \tag{2}$$

$$x = \sum N_i x_i = \{x_1 = x_3 = 0\} = N_2 L - N_4 L = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \cdot L + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \cdot (-L) = \frac{L}{2}(\xi - \eta) \tag{3}$$

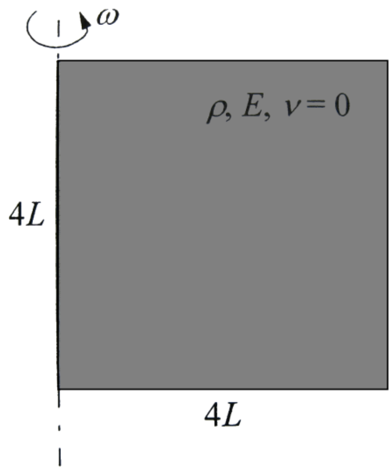
$$y = \sum N_i y_i = \{y_2 = y_4 = 0\} = N_1 L - N_3 L = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \cdot L - \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \cdot (-L) = \frac{L}{2}(-\xi - \eta) \tag{4}$$

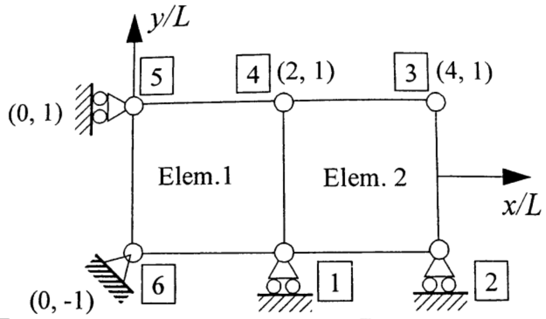
$$(1) \Rightarrow |\mathbf{J}| = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \left(\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{L}{2}\right) - \left(-\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{L}{2}\right) = -\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{4} \Rightarrow \underline{\underline{|\mathbf{J}| = -\frac{L^2}{2}}}$$

Den negativa determinanten kommer resultera i att man får en negativ styvhetsmatris om man utför integralen i det lokala koordinatsystemet. För att undvika det här, numrera i ”rätt” ordning, dvs. moturs. Alternativet är att numrera de lokala noderna i samma ordning, men då måste du ta fram nya formfunktioner själv!

6.19 – Roterande plåt

a) Konsekvent nodlast i element 2





$$\mathbf{D}^T = \left[D_{1x}\ D_{1y}\ D_{2x}\ \dots\ D_{6x}\ D_{6y}\right]$$
$$= \frac{4}{3}\frac{\rho\omega^2 L^3}{E}\left[11\ 0\ 16\ 0\ 16\ 0\ 11\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right]$$

Symmetri gör att endast övre halvan behöver modelleras.

Givet: $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\omega^2 x \\ 0 \end{bmatrix}$ (1)

Tjocklek, h

I element 2 gäller: $\begin{cases} x = (3+\xi)L \\ y = \eta L \end{cases}$ (2)

Sökt: Konsekvent nodlast i element 2.

Lösning:

$$\mathbf{F}_{b,2} = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} dV = h\int_{A_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} dA = \left\{ dA = dxdy = |\mathbf{J}|\, d\xi d\eta \right\} = h\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{N}^T \mathbf{K} |\mathbf{J}|\, d\xi d\eta \quad (3)$$

$$\begin{cases} N_1 = (1-\xi)(1-\eta)/4 \\ N_2 = (1+\xi)(1-\eta)/4 \\ N_3 = (1+\xi)(1+\eta)/4 \\ N_4 = (1-\xi)(1+\eta)/4 \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{J}| = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} = L\cdot L - 0\cdot 0 = L^2 \quad (5)$$

$$(3)\wedge(5)\Rightarrow \mathbf{F}_{b,2}=h\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\underbrace{\begin{bmatrix}N_1 & 0\\ 0 & N_1\\ N_2 & 0\\ 0 & N_2\\ N_3 & 0\\ 0 & N_3\\ N_4 & 0\\ 0 & N_4\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}^T}\underbrace{\begin{bmatrix}\rho\omega^2(3+\xi)L\\ 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{K}}\underbrace{L^2}_{|\mathbf{J}|}\,d\xi d\eta=\frac{\rho\omega^2hL^3}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix}(3+\xi)(1-\xi)(1-\eta)\\ 0\\ (3+\xi)(1+\xi)(1-\eta)\\ 0\\ (3+\xi)(1+\xi)(1+\eta)\\ 0\\ (3+\xi)(1-\xi)(1+\eta)\\ 0\end{bmatrix}d\xi d\eta$$

Integralerna har alla samma form, så vi kan skriva på en form som behandlar alla samtidigt:

$$I=\frac{\rho\omega^2hL^3}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\underbrace{(3+\xi)(1\pm\xi)}_{f(\xi)}\underbrace{(1\pm\eta)}_{g(\eta)}d\xi d\eta$$

I tidigare övning har jag delat upp en liknande dubbelintegral i två vanliga integraler. För den som tycker att det känns skumt kommer en kort förklaring här: $\iint \underbrace{f(\xi)}_{\substack{\text{Beror inte på }\xi\\ \to\text{ kan flyttas ut}\\ \text{som en konstant}}}\;g(\eta)\;d\xi d\eta=\int g(\eta)\underbrace{\int f(\xi)d\xi}_{\substack{\text{Beror inte på }\eta\\ \to\text{ kan flyttas ut}\\ \text{som en konstant}}}d\eta=\int f(\xi)d\xi\int g(\eta)d\eta$

Förstår du fortfarande inte, fråga första bästa fysiker i klassen, alternativt bara acceptera det och drick en cola.

$$\Rightarrow I=\frac{\rho\omega^2hL^3}{4}\int_{-1}^{1}\underbrace{(3+\xi)(1\pm\xi)}_{f(\xi)}d\xi\int_{-1}^{1}\underbrace{(1\pm\eta)}_{g(\eta)}d\eta=\rho\omega^2hL^3\int_{-1}^{1}\left[3+(1\pm3)\xi\pm\xi^2\right]d\xi\int_{-1}^{1}(1\pm\eta)d\eta$$

$$\xi-\text{del: }\int_{-1}^{1}\left[3+(1\pm3)\xi\pm\xi^2\right]d\xi=\left[3\xi+\frac{(1\pm3)}{2}\xi^2\pm\frac{\xi^3}{3}\right]_{-1}^{1}=6\pm\frac{2}{3}=\frac{18\pm2}{3}$$

Gauss 2 punkter: $\int_{-1}^{1}\left[3+(1\pm3)\xi\pm\xi^2\right]d\xi=1\cdot\left[3+(1\pm3)\frac{-1}{\sqrt3}\pm\left(\frac{-1}{\sqrt3}\right)^2\right]+1\cdot\left[3+(1\pm3)\frac{1}{\sqrt3}\pm\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^2\right]=$

$$=\left[3-\cancel{(1\pm3)\frac{1}{\sqrt3}}\pm\frac{1}{3}\right]+\left[3+\cancel{(1\pm3)\frac{1}{\sqrt3}}\pm\frac{1}{3}\right]=6\pm\frac{2}{3}=\frac{18\pm2}{3}$$

$$\eta-\text{del: }\int_{-1}^{1}(1\pm\eta)d\eta=\left[\eta\pm\frac{\eta^2}{2}\right]_{-1}^{1}=2$$

Gauss 1 punkt: $\int_{-1}^{1}(1\pm\eta)d\eta=2\cdot(1\pm0)=2$

$$\Rightarrow I=\rho\omega^2hL^3\frac{18\pm2}{6}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{F}_{b,2}=\frac{\rho\omega^2hL^3}{3}\begin{bmatrix}8 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 8 & 0\end{bmatrix}^T}}$$

b) Spänningar i element 1

Givet: Plan spänning $\Rightarrow \mathbf{C} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} = \{\nu = 0\} = E\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ (6)

$$\mathbf{D} = \frac{4}{3}\frac{\rho\omega^2 L^3}{E}\begin{bmatrix} 11 & 0 & 16 & 0 & 16 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{7}$$

För element 1: $\mathbf{J} = L\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{J}^{-1} = \dfrac{1}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (8)

Exakt lösning: $\sigma_{xx}(x) = \dfrac{\rho\omega^2 L^2}{2}\left[16 - \left(\dfrac{x}{L}\right)^2\right]$ (9)

Sökt: Spänningar i punkterna: $x \in \{0, L, 2L\}, y = 0$, jämför med exakt lösning.

Lösning:

Uttryck för spänningar fås från formelbladet: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{d}_e$ (10)

Formelblad $\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x \\ \partial N_i/\partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}\begin{bmatrix} \partial N_i/\partial \xi \\ \partial N_i/\partial \eta \end{bmatrix} \end{cases}$ (11)

Givet är $\mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^T & \mathbf{d}_2^T & \mathbf{d}_3^T & \mathbf{d}_4^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_6^T & \mathbf{D}_1^T & \mathbf{D}_4^T & \mathbf{D}_5^T \end{bmatrix} = \dfrac{44}{3}\dfrac{\rho\omega^2 L^3}{E}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

Är man smart kan man utnyttja att förskjutningarna är 0 i noderna 5 och 6. Därmed slipper man beräkna två $\mathbf{B}$ *– matriser.*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\left(\underbrace{\mathbf{B}_1\mathbf{d}_1}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{B}_2\mathbf{d}_2 + \mathbf{B}_3\mathbf{d}_3 + \underbrace{\mathbf{B}_4\mathbf{d}_4}_{=\mathbf{0}}\right) = \mathbf{C}\left(\mathbf{B}_2\mathbf{d}_2 + \mathbf{B}_3\mathbf{d}_3\right) \tag{12}$$

$$(8) \wedge (11) \Rightarrow \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x \\ \partial N_i/\partial y \end{bmatrix} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} \partial N_i/\partial \xi \\ \partial N_i/\partial \eta \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_i = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} \partial N_i/\partial \xi & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial \eta \\ \partial N_i/\partial \eta & \partial N_i/\partial \xi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{4L}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(1+\xi) \\ -(1+\xi) & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \frac{1}{4L}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+\xi) \\ (1+\xi) & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$(12) \wedge (13)\ \boldsymbol{\sigma} = \frac{44}{3}\frac{\rho\omega^2 L^3}{E} E \frac{1}{4L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(1+\xi) \\ -(1+\xi) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+\xi) \\ (1+\xi) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{11}{3}\rho\omega^2 L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{22}{3}\rho\omega^2 L^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_{xx} = \frac{22}{3}\rho\omega^2 L^2}} \tag{14}$$

Notera att spänningen är konstant.

FEM, (bi)linjära fyrkantselement:

$$\sigma_{xx}(0) = \frac{22}{3}\rho\omega^2 L^2$$

$$\sigma_{xx}(L) = \frac{22}{3}\rho\omega^2 L^2$$

$$\sigma_{xx}(2L) = \frac{22}{3}\rho\omega^2 L^2$$

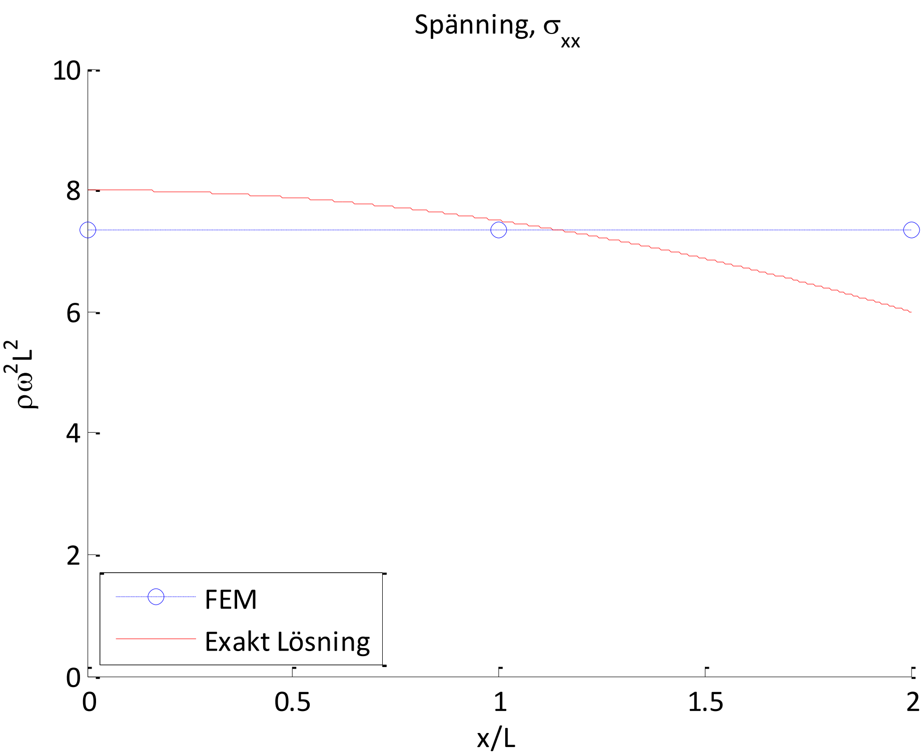
Exakt lösning:

$$\sigma_{xx}(0) = \frac{24}{3}\rho\omega^2 L^2$$

$$\sigma_{xx}(L) = \frac{22.5}{3}\rho\omega^2 L^2$$

$$\sigma_{xx}(2L) = \frac{18}{3}\rho\omega^2 L^2$$

Plotta i MATLAB $\Rightarrow$



Geometrin är korrekt beskriven av elementnätet. Lasten angriper däremot i volymen, och att beskriva det som konsekventa nodlaster ger ett bidrag till avvikelsen. En annan felkälla är att det är ett linjärt element. Linjära element kan bara beskriva konstant töjning/spänning.