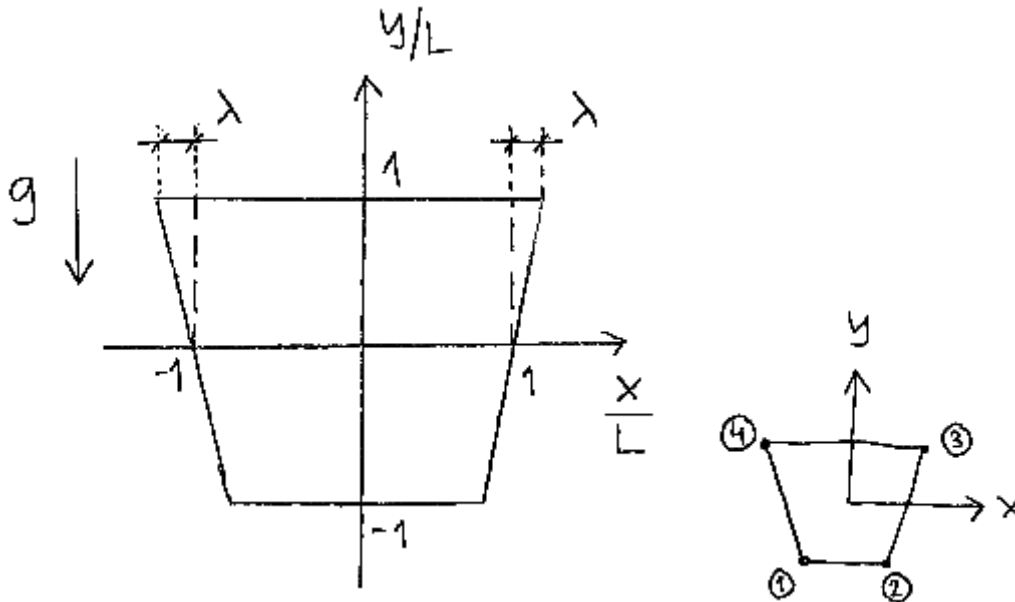


## 6.8 b) – Konsistenta nodlaster med "vanlig integrering"

Bilder av Veronica Wätz och Jonas Faleskog.



**Givet:** Plåttjocklek,  $h[m]$

Densitet,  $\rho[kg/m^3]$

$\lambda = 1/2$

**Sökt:** Bidraget till nodlastvektorn (konsistenta nodlaster) på grund av egenvikten,  $K_y = -\rho g$ .

**Lösning:**

Från formelbladet:

$$\mathbf{F}_b = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K}_b dV, \quad (1)$$

där  $\mathbf{K}$  är volymslasten, inte styvhetsmatrisen, som ser ut såhär:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{bmatrix} \quad (2)$$

Om lasten  $\mathbf{K}_b$  ges i globala koordinatsystemet fås konsistenta nodlastvektorn också i globala koordinatsystemet  $\Rightarrow \mathbf{F}_b$ .

Vice versa gäller förstås om  $\mathbf{K}_b$  ges i lokala koordinatsystemet,  $\Rightarrow \mathbf{f}_b$ , se även bilagan i slutet.

Eftersom plåtens tjocklek är konstant, blir

$$dV = h dA = h dx dy, \quad (3)$$

och volymsintegralen blir en ytintegral istället:

$$\mathbf{F}_b = h \iint_{A_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} dx dy \quad (4)$$

Formfunktionerna är givna i formelbladet för ett lokalt koordinatsystem där fyrkanten har den trevligaste form man kan tänka sig, en kvadrat med hörnen i trevliga koordinater. Vi vill gärna göra integralen i det koordinatsystemet. Som man minns (eller möjligen har glömt) från matten är 1 areaenhet i  $x - y$ -systemet inte lika stort som 1 areaenhet i  $\xi - \eta$ -systemet. Som valutaomvandlare har man Jacobian-determinanten. Den finns i **Beta, längst ner s. 230**, om än lite kryptiskt matematiskt uttryckt. Jacobianen finns även i formelbladet.

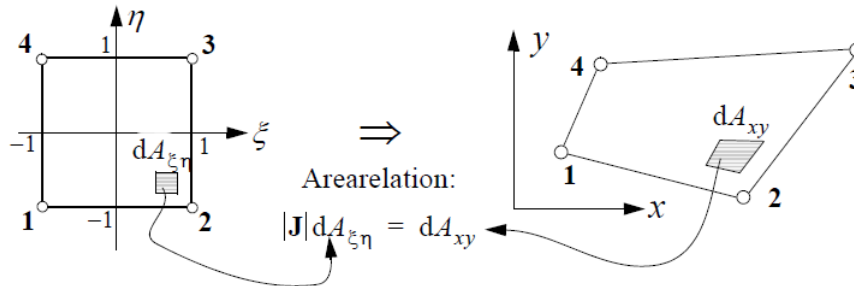


Bild från Jonas Faleskogs OH-slides.

I vilket fall gäller att

$$dxdy = |\mathbf{J}| d\xi d\eta, \tag{5}$$

och nu ser man att determinanten av Jacobianen måste beräknas för att komma vidare.

Från formelbladet har vi:

**4-sidigt isoparametriskt element:**

$$x = \sum_i N_i x_i$$

$$y = \sum_i N_i y_i$$

$$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)/4, \quad N_2 = (1+\xi)(1-\eta)/4$$

$$N_3 = (1+\xi)(1+\eta)/4, \quad N_4 = (1-\xi)(1+\eta)/4$$

Förskjutningar: 
$$\begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$$

Töjningar: 
$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3 \ \mathbf{B}_4] \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

där 
$$\begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}$$

För att beräkna Jacobianen behövs uttrycken för  $x(\xi, \eta)$  och  $y(\xi, \eta)$ . Längre upp i formelbladet ser man att  $x = \sum N_i x_i, y = \sum N_i y_i$ , vilket är anledningen till att det här kallas "isoparametriskt", dvs. man har samma formfunktioner till koordinaterna som till förskjutningarna. Formfunktionerna är bara att skriva av från formelbladet, och  $x_i, y_i$  är nodernas koordinater.

Vi börjar med att tabellera nodkoordinaterna:

Nod, $i$	1	2	3	4
$x_i$	$(-1+\lambda)L$	$(1-\lambda)L$	$(1+\lambda)L$	$(-1-\lambda)L$
$y_i$	$-L$	$-L$	$L$	$L$

Nu till den dryga biten... (tar i för sig bara 1-2 min i Maple tack vare copy-paste).

$$x(\xi, \eta) = \sum N_i x_i = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}(-1+\lambda)L + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}(1-\lambda)L + \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}(1+\lambda)L + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}(-1-\lambda)L = \dots = L\xi(1+\lambda\eta) \quad (6)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum N_i y_i = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}(-L) + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}(-L) + \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}L + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}L = \dots = L\eta \quad (7)$$

Genom att partialderivera (6) och (7) fås Jacobianen, och därifrån dess determinant:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(1+\lambda\eta) & 0 \\ L\lambda\xi & L \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\Rightarrow |\mathbf{J}| = \det \begin{bmatrix} L(1+\lambda\eta) & 0 \\ L\lambda\xi & L \end{bmatrix} = L(1+\lambda\eta) \cdot L - L\lambda\xi \cdot 0 = L^2(1+\lambda\eta) \quad (9)$$

Med Jacobianen känd är det bara att integrera på.

$$(5),(9) \text{ i (4)} \Rightarrow \mathbf{F}_b = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{bmatrix} L^2(1+\lambda\eta) d\xi d\eta = -\frac{\rho ghL^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\xi)(1-\eta) \\ 0 \\ (1+\xi)(1-\eta) \\ 0 \\ (1+\xi)(1+\eta) \\ 0 \\ (1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} (1+\lambda\eta) d\xi d\eta$$

Alla raders integraler ser ut på ungefär samma sätt och kan därför behandlas på liknande sätt:

$$I = -\frac{\rho ghL^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underbrace{(1\pm\xi)}_{f(\xi)} \underbrace{(1\pm\eta)}_{g(\eta)} (1+\lambda\eta) d\xi d\eta = -\frac{\rho ghL^2}{4} \int_{-1}^1 \underbrace{(1\pm\xi)}_{f(\xi)} d\xi \int_{-1}^1 \underbrace{(1\pm\eta)}_{g(\eta)} (1+\lambda\eta) d\eta$$

$$\xi - \text{del: } \int_{-1}^1 (1 \pm \xi) d\xi = \left[ \xi \pm \frac{\xi^2}{2} \right]_{-1}^1 = \left( 1 \pm \frac{1^2}{2} \right) - \left( -1 \pm \frac{(-1)^2}{2} \right) = 2 \pm \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} = 2$$

Tecknet  $\mp$  betyder att det ska vara motsatt det tecken man väljer till  $\pm$ .

$$\begin{aligned} \eta - \text{del: } \int_{-1}^1 (1 \pm \eta)(1 + \lambda \eta) d\eta &= \int_{-1}^1 [1 + (\lambda \pm 1)\eta \pm \lambda \eta^2] d\eta = \left[ \eta + \frac{(\lambda \pm 1)}{2} \eta^2 \pm \frac{\lambda}{3} \eta^3 \right]_{-1}^1 = \\ &= \left( 1 + \frac{(\lambda \pm 1)}{2} 1^2 \pm \frac{\lambda}{3} 1^3 \right) - \left( -1 + \frac{(\lambda \pm 1)}{2} (-1)^2 \pm \frac{\lambda}{3} (-1)^3 \right) = 2 \pm \frac{2\lambda}{3} = 2 \left( 1 \pm \frac{\lambda}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{\rho g h L^2}{4} \cdot 2 \cdot 2 \left( 1 \pm \frac{\lambda}{3} \right) = -\frac{\rho g h L^2}{3} (3 \pm \lambda) = \left\{ \lambda = \frac{1}{2} \right\} = -\frac{\rho g h L^2}{6} (6 \pm 1), \quad (10)$$

där tecknet bestäms av om formfunktionen innehåller  $(1 + \eta)$  eller  $(1 - \eta)$ .

Det blir negativt tecken för noderna på botten, och positivt tecken för noderna på toppen.

$$\Rightarrow \mathbf{F}_b = -\frac{\rho g h L^2}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Rimlighetskontroll (snabb smidig koll på att man fått en rimlig lastvektor):

$$\sum F_{i,y} = -\frac{\rho g h L^2}{6} (5 + 5 + 7 + 7) = -\frac{24}{6} \rho g h L^2 = -\rho g 4hL^2 = -mg, \text{ ok!}$$

## 6.9 – Konsistenta nodlaster med Gaussintegration

Bilder av Veronica Wåtz.

Gaussintegration är en numerisk integrationsmetod som, till skillnad från trapetsmetoden, kan få exakta svar om man använder tillräckligt många integrationspunkter och integrerar på polynom.

**Visdomsord:** Med  $m$  st integrationspunkter kan man integrera på ett polynom av grad  $(2m-1)$  och få ett exakt svar.

$$\mathbf{Givet:} \text{ Från 6.8: } \mathbf{F}_b = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{K} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \Rightarrow \begin{cases} F_{1,y} = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} (-\rho g) L^2 (1+\lambda\eta) d\xi d\eta \\ F_{2,y} = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} (-\rho g) L^2 (1+\lambda\eta) d\xi d\eta \\ F_{3,y} = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} (-\rho g) L^2 (1+\lambda\eta) d\xi d\eta \\ F_{4,y} = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} (-\rho g) L^2 (1+\lambda\eta) d\xi d\eta \\ F_{1,x} = F_{2,x} = F_{3,x} = F_{4,x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

**Sökt:** Konsistenta nodlaster för 6.8 b), men integralen beräknad numeriskt med Gaussintegration.

### a) - ( $m_\xi = 1, m_\eta = 1$ ) integrationspunkter

**Lösning:**

$$\text{Rent allmänt vid Gaussintegration: } I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^m w_i f(x_i). \quad (2)$$

Vi vill dubbelintegrera, vilket inte är annat än att integrera två gånger.

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \underbrace{g(\eta)}_{g(\eta)} d\eta = \sum_{i=1}^{m_\eta} w_i g(\eta_i) = \sum_{i=1}^{m_\eta} \left( w_i \sum_{j=1}^{m_\xi} w_j f(\xi_j, \eta_i) \right) = \sum_{i=1}^{m_\eta} \sum_{j=1}^{m_\xi} w_i w_j f(\xi_j, \eta_i) \quad (3)$$

$$\text{I det här fallet har vi att } f(\xi, \eta) = -\frac{\rho g h L^2}{4} (1 \pm \xi)(1 \pm \eta)(1 + \lambda \eta), \quad (4)$$

där tecknen beror på den aktuella nodens formfunktion.

Här ser man att med avseende på  $\xi$  har vi ett polynom av grad 1.

$(2m_\xi - 1) \geq 1 \Rightarrow$  Ok! Den integralen kommer att bli exakt.

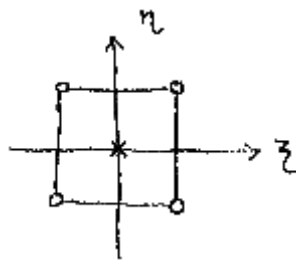
Med avseende på  $\eta$  har vi däremot ett polynom av grad 2.

$2m_\eta - 1 < 2 \Rightarrow$  Vi kan förvänta oss numeriska fel.

Vikterna finns i kursboken s.146, samt en tabell för högsta polynomgrad med exakt svar. Liknande tabell finns på bl a wikipedia om man googlar på "Gauss integration" eller "Gauss quadrature".

146 CHAPTER 7 FEM FOR TWO-DIMENSIONAL SOLIDS			
Table 7.1. Gauss integration points and weight coefficients			
$m$	$\xi_j$	$w_j$	Accuracy $n$
1	0	2	1
2	$-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$	1,1	3
3	$-\sqrt{0.6}, 0, \sqrt{0.6}$	5/9, 8/9, 5/9	5
4	$-0.861136, -0.339981,$ $0.339981, 0.861136$	0.347855, 0.652145, 0.652145, 0.347855	7
5	$-0.906180, -0.538469, 0,$ $0.538469, 0.906180$	0.236927, 0.478629, 0.568889, 0.478629, 0.236927	9
6	$-0.932470, -0.661209, -0.238619,$ $0.238619, 0.661209, 0.932470$	0.171324, 0.360762, 0.467914, 0.467914, 0.360762, 0.171324	11

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_{i=1} = 0 & w_{i=1} = 2 \\ \eta_{j=1} = 0 & w_{j=1} = 2 \end{cases}$$



← 1x1 integrationspunkter

$$F_{1,y} = -\frac{\rho ghL^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-\xi)(1-\eta)(1+\lambda\eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{m_\eta} \sum_{j=1}^{m_\xi} w_i w_j f_1(\xi_j, \eta_i) = 2 \cdot 2 \cdot f(0,0) =$$

$$= -\rho ghL^2 (1-0)(1-0)(1+\underline{\lambda \cdot 0}) = -\rho ghL^2$$

Notera att lutningens inverkan försvinner med bara en integrationspunkt i det här fallet.

På samma sätt:

$$F_{2,y} = \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^1 2 \cdot 2 \cdot f(0,0) = -\rho ghL^2 (1-0)(1-0)(1+\lambda \cdot 0) = -\rho ghL^2$$

$$F_{3,y} = \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^1 2 \cdot 2 \cdot f(0,0) = -\rho ghL^2 (1-0)(1-0)(1+\lambda \cdot 0) = -\rho ghL^2$$

$$F_{4,y} = \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^1 2 \cdot 2 \cdot f(0,0) = -\rho ghL^2 (1-0)(1-0)(1+\lambda \cdot 0) = -\rho ghL^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{F}_b = -\rho ghL^2 [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T}}$$

Här ser man att svaret avviker från det exakta svaret vi räknade fram i 6.8.

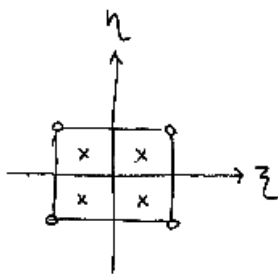
## b) - ( $m_\xi = 2, m_\eta = 2$ ) integrationspunkter

### Lösning:

Den här gången använder vi två integrationspunkter i vardera led.  $2 \cdot m - 1 = 3$ , så vi kan integrera på upp till tredje gradare och få exakt svar. I  $\xi$ -led har vi grad 1, och i  $\eta$ -led integrerar vi på en grad 2, så det är rimligt att förutspå att svaret kommer stämma med det analytiska svaret.

Från tabellen läser vi av integrationspunkternas positioner och vikter.

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_{i=1} = -1/\sqrt{3} & w_{i=1} = 1 \\ \xi_{i=2} = 1/\sqrt{3} & w_{i=2} = 1 \\ \eta_{j=1} = -1/\sqrt{3} & w_{j=1} = 1 \\ \eta_{j=2} = 1/\sqrt{3} & w_{j=2} = 1 \end{cases}$$



← 2x2 integrationspunkter

$$\begin{aligned} F_{1,y} &= -\frac{\rho ghL^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-\xi)(1-\eta) \left(1 + \frac{1}{2}\eta\right) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{m_\eta} \sum_{j=1}^{m_\xi} w_i w_j f(\xi_j, \eta_i) = \\ &= -\frac{\rho ghL^2}{4} \left[ 1 \cdot 1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \left(1 + \lambda\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \right. & w_\xi = 1, w_\eta = 1, \xi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \eta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &+ 1 \cdot 1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \left(1 + \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + & w_\xi = 1, w_\eta = 1, \xi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \eta = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &+ 1 \cdot 1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \left(1 + \lambda\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + & w_\xi = 1, w_\eta = 1, \xi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \eta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &+ 1 \cdot 1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \left(1 + \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \left. \right] = & w_\xi = 1, w_\eta = 1, \xi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \eta = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \dots = -\rho ghL^2 \frac{5}{6} \end{aligned}$$

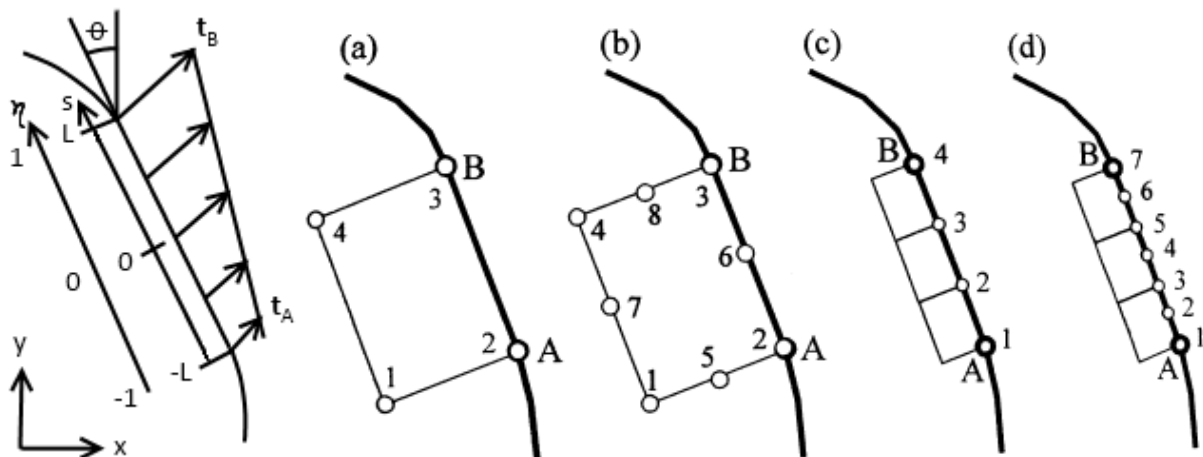
På samma sätt:

$$F_{2,y} = -\rho ghL^2 \frac{5}{6}, F_{3,y} = -\rho ghL^2 \frac{7}{6}, F_{4,y} = -\rho ghL^2 \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{F}_b = -\frac{\rho ghL^2}{6} [0 \ 5 \ 0 \ 5 \ 0 \ 7 \ 0 \ 7]^T}}$$

Precis som analytiska lösningen!

## 6.10 – Konsistenta nodlaster med varierande ytlast



**Givet:** Plättjocklek  $h$

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{s}{L} \right) \mathbf{t}_A + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{s}{L} \right) \mathbf{t}_B$$

$\mathbf{t}$  varierar linjärt och består av last i både x-led och y-led.

**Sökt:** Ta fram konsistenta nodlaster för fallen ovan. I c) och d) är lasten konstant,  $\mathbf{t}_A = \mathbf{t}_B = \mathbf{t}$ .

### a) – Isoparametriskt 4-noders element

**Lösning:**

Från formelbladet:  $\mathbf{F}_s = \int_{S_c} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS$

Formfunktionerna är givna i formelbladet för lokalt koordinatsystem, och  $s = L\eta$ , så integration i lokalt koordinatsystem verkar ju vettigare än att integrera över en sned yta.

$$\Rightarrow \mathbf{F}_s = \{ \text{konstant tjocklek } h \Rightarrow dS = hds \} = h \int_{-L}^L \mathbf{N}^T \mathbf{t} ds = \{ ds = Ld\eta \} = hL \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\eta \quad (1)$$

Lasten vill vi ha uttryckt som funktion av  $\eta$ ,  $\mathbf{t}(s) \rightarrow \mathbf{t}(\eta)$ .

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{s}{L} \right) \mathbf{t}_A + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{s}{L} \right) \mathbf{t}_B \Leftrightarrow \left\{ \frac{s}{L} = \eta \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-\eta)t_{Ax} + (1+\eta)t_{Bx} \\ (1-\eta)t_{Ay} + (1+\eta)t_{By} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Lasten angriper längs med  $\xi = 1$ , och kommer att fördelas mellan dessa två noder eftersom de andra nodernas formfunktioner är 0 där. Det räcker därför att bara räkna på de noderna (2 och 3).

Integralerna kommer alltså att se ut som:

$$\text{x-led: } F_{i,x} = \frac{hL}{2} \int_{-1}^1 N_i [(1-\eta)t_{Ax} + (1+\eta)t_{Bx}] d\eta = \frac{hL}{2} \int_{-1}^1 N_i [(t_{Ax} + t_{Bx}) + (t_{Bx} - t_{Ax})\eta] d\eta \quad (3)$$

$$\text{y-led: } F_{i,y} = \frac{hL}{2} \int_{-1}^1 N_i [(1-\eta)t_{Ay} + (1+\eta)t_{By}] d\eta = \frac{hL}{2} \int_{-1}^1 N_i [(t_{Ay} + t_{By}) + (t_{By} - t_{Ay})\eta] d\eta \quad (4)$$



Bara att börja räkna då. Lasten angriper längs med  $\xi = 1$ , så  $N_i(\xi, \eta) = N_i(1, \eta)$ . Integralen kan beräknas med godtycklig metod. Personligen föredrar jag Maple.

$$F_{2,x} = \frac{hL}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{(1+1)(1-\eta)}{4} \right] \left[ (t_{Ax} + t_{Bx}) + (t_{Bx} - t_{Ax})\eta \right] d\eta = \frac{hL}{3} (2t_{Ax} + t_{Bx})$$

$$F_{2,y} = \frac{hL}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{(1+1)(1-\eta)}{4} \right] \left[ (t_{Ay} + t_{By}) + (t_{By} - t_{Ay})\eta \right] d\eta = \frac{hL}{3} (2t_{Ay} + t_{By})$$

$$F_{3,x} = \frac{hL}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{(1+1)(1+\eta)}{4} \right] \left[ (t_{Ax} + t_{Bx}) + (t_{Bx} - t_{Ax})\eta \right] d\eta = \frac{hL}{3} (t_{Ax} + 2t_{Bx})$$

$$F_{3,y} = \frac{hL}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{(1+1)(1+\eta)}{4} \right] \left[ (t_{Ay} + t_{By}) + (t_{By} - t_{Ay})\eta \right] d\eta = \frac{hL}{3} (t_{Ay} + 2t_{By})$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_b = \frac{hL}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t_{Ax} + t_{Bx} \\ 2t_{Ay} + t_{By} \\ t_{Ax} + 2t_{Bx} \\ t_{Ay} + 2t_{By} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Rimlighetskontroll:

$$\sum F_{i,x} = \frac{hL}{3} (2t_{Ax} + t_{Ax} + t_{Bx} + 2t_{Bx}) = 2hL \underbrace{\left( \frac{t_{Ax} + t_{Bx}}{2} \right)}_{\text{Genomsnittslast}}, \text{ ok!}$$

(Ser likadant ut i y-led, så ok där också.)

## b) - Isoparametriskt 8-noders element

### Lösning:

Den enda skillnaden mot a) är en extra nod att räkna på, och att vi får ta fram formfunktionerna själva.

I brist på formfunktioner i formelbladet får vi komma på egna. Det görs genom att ställa upp två villkor.

1. Ska vara 1 i sin hemmanod.
2. Ska vara 0 i andra noder.

Det räcker med att räkna ut formfunktioner för de noderna som ligger längs ytan. Ställ upp:

$$N_i = k_i (0 - \xi)(-1 - \xi)(\eta_j - \eta)(\eta_k - \eta) = k_i \xi(1 + \xi)(\eta_j - \eta)(\eta_k - \eta),$$

där  $\xi(1 + \xi)$  gör att formfunktionen blir 0 vid noderna 1,4,5,7 och 8. De andra parenteserna ser till att formfunktionen är 0 i de resterande två noderna som inte är "hemmanod".

$$\begin{cases} N_2(\xi, \eta) = k_2 \xi(1 + \xi)(1 - \eta)(0 - \eta) \Rightarrow N_2(\xi, \eta) = k_2 \xi(1 + \xi)(\eta^2 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) = k_3 \xi(1 + \xi)(-1 - \eta)(0 - \eta) \Rightarrow N_3(\xi, \eta) = k_3 \xi(1 + \xi)(\eta^2 + \eta) \\ N_6(\xi, \eta) = k_6 \xi(1 + \xi)(1 - \eta)(-1 - \eta) \Rightarrow N_6(\xi, \eta) = k_6 \xi(1 + \xi)(\eta^2 - 1) \end{cases} \quad (6)$$

Härmed är krav 2 uppfyllt för formfunktionerna. Krav 1 uppfylls genom att bestämma konstanten till ett lämpligt värde.

$$\begin{cases} N_2(1, -1) = 1 \Leftrightarrow k_2 \underbrace{[1(1+1)]}_2 \underbrace{[(-1)^2 - (-1)]}_2 = 1 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow N_2|_{\xi=1} = \frac{\eta^2 - \eta}{2} \\ N_3(1, 1) = 1 \Leftrightarrow k_3 \underbrace{[1(1+1)]}_2 \underbrace{[(1)^2 + (1)]}_2 = 1 \Rightarrow k_3 = \frac{1}{4} \Rightarrow N_3|_{\xi=1} = \frac{\eta^2 + \eta}{2} \\ N_6(1, 0) = 1 \Leftrightarrow k_6 \underbrace{[1(1+1)]}_2 \underbrace{[(0)^2 - 1]}_{-1} = 1 \Rightarrow k_6 = -\frac{1}{2} \Rightarrow N_6|_{\xi=1} = 1 - \eta^2 \end{cases} \quad (7)$$

Från a) såg man att integralerna i x- och y-led var identiska, så det räcker att räkna på x-led och kopiera resultatet till y-led. Kom ihåg att byta index till  $t_{Ay}, t_{By}$ !

$$(3) \Rightarrow \begin{cases} F_{2,x} = \frac{hL}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{\eta^2 - \eta}{2} \right] [(t_{Ax} + t_{Bx}) + (t_{Bx} - t_{Ax})\eta] d\eta = \frac{hL}{3} t_{Ax} \\ F_{3,x} = \frac{hL}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{\eta^2 + \eta}{2} \right] [(t_{Ax} + t_{Bx}) + (t_{Bx} - t_{Ax})\eta] d\eta = \frac{hL}{3} t_{Bx} \\ F_{6,x} = \frac{hL}{2} \int_{-1}^1 [1 - \eta^2] [(t_{Ax} + t_{Bx}) + (t_{Bx} - t_{Ax})\eta] d\eta = \frac{hL}{3} 2(t_{Ax} + t_{Bx}) \end{cases} \quad (8)$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_b = \frac{hL}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & t_{Ax} & t_{Ay} & t_{Bx} & t_{By} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(t_{Ax} + t_{Bx}) & 2(t_{Ay} + t_{By}) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

Rimlighetskontroll:

$$\sum F_{i,x} = \frac{hL}{3} [t_{Ax} + t_{Bx} + 2(t_{Ax} + t_{Bx})] = hL(t_{Ax} + t_{Bx}) = 2hL \underbrace{\left( \frac{t_{Ax} + t_{Bx}}{2} \right)}_{\text{Genomsnittslast}}, \text{ ok!}$$

(Ser likadant ut i y-led, så ok där också.)

### c) - 3x isoparametriska 4-noders element, konstant last

#### Lösning:

I a) har vi redan löst hur konsekventa nodlasten blir för linjärt varierande last. Konstant last är ett specialfall där  $t_A = t_B = t$ .

$$(5) \Rightarrow \mathbf{F}_{b,e} = \frac{hL}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t_{Ax} + t_{Bx} \\ 2t_{Ay} + t_{By} \\ t_{Ax} + 2t_{Bx} \\ t_{Ay} + 2t_{By} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} t_{Ax} = t_{Bx} = t_x \\ t_{Ay} = t_{By} = t_y \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mathbf{F}_{b,e} = hL \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t_x \\ t_y \\ t_x \\ t_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Strukturen består av flera element nu, så för att markera att det här handlar om elementets nodlaster och inte hela strukturens nodlast slänger jag på ett "e" i indexet.

### d) - 3x isoparametriska 8-noders element, konstant last

#### Lösning:

Samma resonemang som ovan, använd b) som elementarfall.

$$(9) \Rightarrow \mathbf{F}_{b,e} = \frac{hL}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & t_{Ax} & t_{Ay} & t_{Bx} & t_{By} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(t_{Ax} + t_{Bx}) & 2(t_{Ay} + t_{By}) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \Rightarrow$$

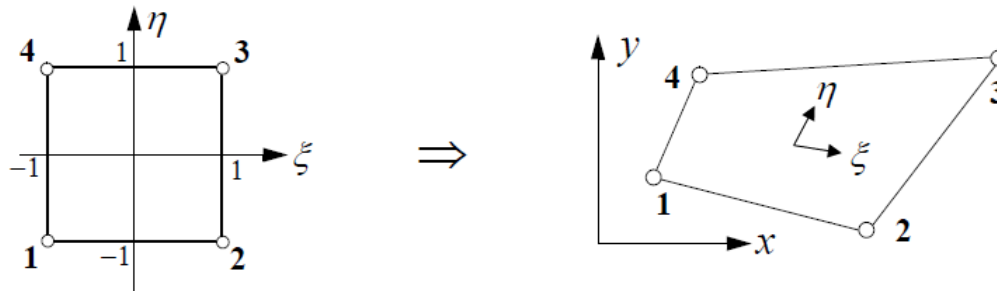
$$\Rightarrow \mathbf{F}_{b,e} = \frac{hL}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & t_x & t_y & t_x & t_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t_x & 4t_y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

För att få global lastvektor i c) och d), assemblera som i tidigare övningar.

## Bilaga – Extragrejs

### $\mathbf{F}_{b,e}$ eller $\mathbf{f}_{b,e}$ ?

I formelbladet står det bara  $\int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K}_b dV$ . I tidigare övningar på 2D-element har vi alltid haft turen att globala och lokala koordinatsystemen sammanfallit, och då gäller att  $\mathbf{F}_{b,e} = \mathbf{f}_{b,e}$ . Dessa koordinatsystem behöver förstås inte sammanfalla, se bild nedan. Då är det definitionen av  $\mathbf{K}_b$  som bestämmer.

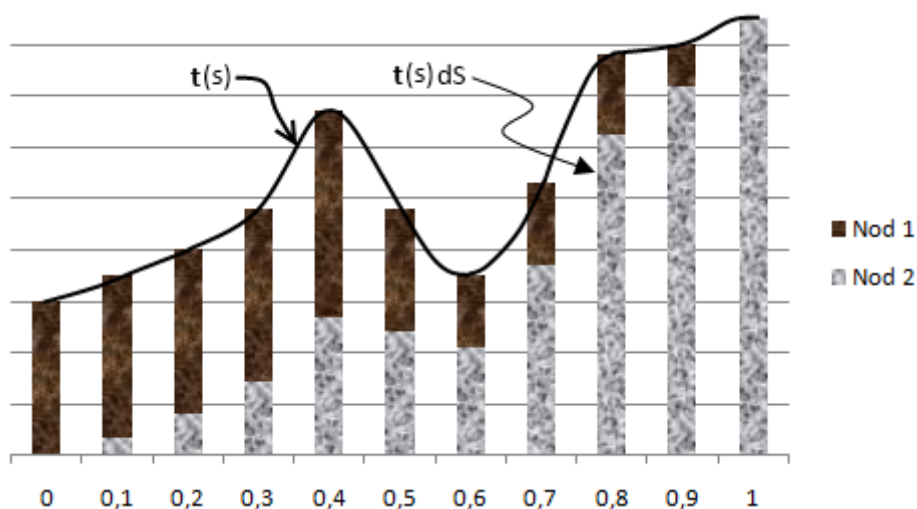


$$\mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix}_{x,y} \Rightarrow \mathbf{F}_{b,e} = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} dV, \quad \mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} K_\xi \\ K_\eta \end{bmatrix}_{\xi,\eta} \Rightarrow \mathbf{f}_{b,e} = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} K_\xi \\ K_\eta \end{bmatrix} dV$$

Motsvarande gäller förstås för ytlaster.

### Tolkning av integralen för konsekventa nodlaster

Integralen kan tolkas som en funktion som fördelar kraften. Vid varje punkt längs med integralen finns en viss mängd last  $\mathbf{t}(s) dS$ . Formfunktionerna i den punkten talar om hur stor andel av lasten som ska gå till respektive nod. Alla små delbidrag (varje stapel) summeras (integreras) och man får reda på hur ytlasten påverkar noderna. Konsekventa nodlaster för volymslaster fungerar på precis samma sätt, men varje stapel representerar en liten bit volym istället.



Totala lasten fördelar sig mellan noderna.