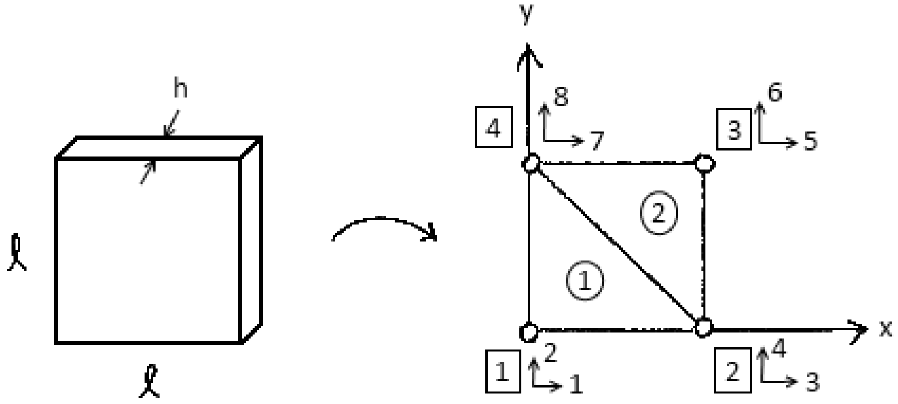
6.14 – Triangelelement (CST – Constant Strain Triangle)



Givet: Tunn plåt, $h \ll l$
E-modul E
Poissons tal $\nu = 0$

På tunn plåt med fria ytor kan man göra antagande om plan spänning (P.S.), dvs att en av huvudspänningarna är 0 (spänningen i tjockleksriktningen). Det här är en god approximation för tunna plåtar om plåtens tjocklek är fri att krympa eller expandera fritt vid belastning. I den här uppgiften kommer vi att göra just detta antagande.

Om ytan istället är förhindrad att röra sig, dvs $\varepsilon_z = 0$, kan man använda sig av plan deformation (P.D.). Det enda som skiljer är materialets styvhetsmatris $\mathbf{C}$ (matrisversion av E-modulen). Detta används generellt sett till tjocka plåtar, eller om klämmer fast plåten.

***Lite kuriosa om plåt (har inget med FEM att göra)**: Man bör undvika att utsätta plåt för dragspänning i tjockleksriktning då plåtar tenderar att ha inbyggda defekter från gjutning som blir platta och vassa efter valsning (~kavla stål). Dessa defekter resulterar i kraftigt försämrade brottmekaniska egenskaper i tjockleksriktningen. För mer info, fråga en bergsman.*

Sökt: Nodförskjutningar och spänningar i elementen för respektive lastfall, enaxlig dragning i a), och egenvikt i c).

Lösning:

Det är ingen markant skillnad mellan FEM i 1D och 2D. Formfunktionerna går från $\mathbf{N}(x) \to \mathbf{N}(x,y)$ och man använder $\mathbf{C}$ istället för E. I övrigt är det egentligen inget nytt, och lösningsstrategin består fortfarande av att ta fram

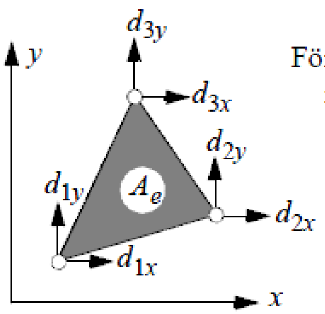
- *Styvhetsmatris*
- *Lastvektor*
- *Randvillkor*

för att sedan lösa ekvationen med hjälp av ett reducerat system.

Som vanligt tar vi en titt på FEM-ekvationen, $\mathbf{F} = \mathbf{KD}$. Geometrin och materialet är samma i båda deluppgifterna, dvs. styvhetsmatrisen kommer vara densamma. Vi börjar därför som vanligt med att ta fram globala styvhetsmatrisen $\mathbf{K}$.

Allt vi behöver finns i formelbladet:

3-sidigt triangelelement:



Förskjutningar:

$$\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N}\mathbf{d}_e \qquad \mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{2A_e}[(y_2 - y_3)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2)]$$

$$N_2 = \frac{1}{2A_e}[(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3)]$$

$$N_3 = \frac{1}{2A_e}[(y_1 - y_2)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1)]$$

Töjningar:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B}\,\mathbf{d}_e \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x \end{bmatrix}$$

Spänningar:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \text{(P.S)} \qquad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \text{(P.D)}$$

FEM Ekv. (ett element):

$$\left[\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}\, dV \right] \mathbf{d}_e = \left[\int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t}\, dS + \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K}\, dV \right]$$

$\mathbf{t}$ = spänningsvektor
$\mathbf{K}$ = volymskraft

Formfunktionerna är formulerade så att man kan använda globala x-y-koordinater direkt.

$$\Rightarrow \mathbf{K}_e = \mathbf{k}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}\, dV = \{\text{konstant tjocklek}\} = h \int_{A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}\, dA \tag{1}$$

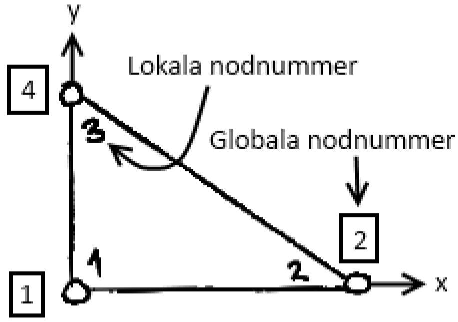
Från formelbladet kan man identifiera att $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\text{P.S.}} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$.

Med $\nu = 0$ insatt fås: $\mathbf{C} = \frac{E}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2)

P.S. = plane stress, P.D. = plane deformation (samma sak som plane strain).

***Några typvärden för ν (har inget med FEM att göra)**: Metaller har generellt sett $\nu \approx 0.2 - 0.3$. Inkompressibla vätskor har $\nu = 0.5$. Polymerer är lite svårare eftersom inget tenderar att vara speciellt konstant. En tumregel dock är att styva polymerer generellt sett har ett lägre värde på ν, medan t ex mjukt gummi kan ha upp till $\nu \approx 0.4999$. Om ν är viktigt att veta för en polymer bör den testas vid tilltänkt arbetstemeratur, lasthastighet, kristallinitetsgrad.*

Element 1:



$$\begin{cases} (x_1,y_1)=(0,0) \\ (x_2,y_2)=(l,0) \\ (x_3,y_3)=(0,l) \\ A_e=\dfrac{l^2}{2} \Leftrightarrow A_e=l^2 \end{cases}$$

$$N_1=\frac{1}{2A_e}\left[(y_2-y_3)(x-x_2)+(x_3-x_2)(y-y_2)\right]=\frac{1}{l^2}\left[(0-l)(x-l)+(0-l)(y-0)\right]=1-\frac{x}{l}-\frac{y}{l}$$

$$N_2=\frac{1}{2A_e}\left[(y_3-y_1)(x-x_3)+(x_1-x_3)(y-y_3)\right]=\frac{1}{l^2}\left[(l-0)(x-0)+(0-0)(y-l)\right]=\frac{x}{l}$$

$$N_3=\frac{1}{2A_e}\left[(y_1-y_2)(x-x_1)+(x_2-x_1)(y-y_1)\right]=\frac{1}{l^2}\left[(0-0)(x-0)+(l-0)(y-0)\right]=\frac{y}{l}$$

Rimlighetskontroll: $N_1+N_2+N_3=\left(1-\frac{x}{l}-\frac{y}{l}\right)+\left(\frac{x}{l}\right)+\left(\frac{y}{l}\right)=1$*, ok.*

Med derivering av formfunktionerna får vi $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{B}_i=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_1=\frac{1}{l}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2=\frac{1}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3=\frac{1}{l}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}=\left[\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3\right] \Rightarrow$$

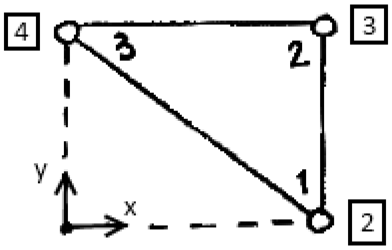
$$\mathbf{B}=\frac{1}{l}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Glöm inte $1/l$ *-faktorn, annars blir det dimensionsfel!*

(2) och (3) i (1) $\Rightarrow \mathbf{K}_{e,1}=h\int_{A_e}\underbrace{\mathbf{B}^T\mathbf{C}\mathbf{B}}_{\text{konstanter}}dA=h\mathbf{B}^T\mathbf{C}\mathbf{B}\int_{A_e}dA=A_e h\mathbf{B}^T\mathbf{C}\mathbf{B}=\frac{l^2 h}{2}\mathbf{B}^T\mathbf{C}\mathbf{B}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbf{K}_{e,1} = \frac{Eh}{4} \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \\ & \text{Frihetsgrader} \end{array} \tag{4}$$

Element 2:



$$\begin{cases} (x_1, y_1) = (l, 0) \\ (x_2, y_2) = (l, l) \\ (x_3, y_3) = (0, l) \\ A_e = \dfrac{l^2}{2} \Leftrightarrow A_e = l^2 \end{cases}$$

$$N_1 = \frac{1}{2A_e}\left[(y_2 - y_3)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2)\right] = \frac{1}{l^2}\left[(l - l)(x - l) + (0 - l)(y - l)\right] = 1 - \frac{y}{l}$$

$$N_2 = \frac{1}{2A_e}\left[(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3)\right] = \frac{1}{l^2}\left[(l - 0)(x - 0) + (l - 0)(y - l)\right] = \frac{x}{l} + \frac{y}{l} - 1$$

$$N_3 = \frac{1}{2A_e}\left[(y_1 - y_2)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1)\right] = \frac{1}{l^2}\left[(0 - l)(x - l) + (l - l)(y - 0)\right] = 1 - \frac{x}{l}$$

Rimlighetskontroll: $N_1 + N_2 + N_3 = \left(1 - \frac{y}{l}\right) + \left(\frac{x}{l} + \frac{y}{l} - 1\right) + \left(1 - \frac{x}{l}\right) = 1$, *ok.*

$$\Rightarrow \mathbf{B}_1 = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \mathbf{K}_{e,2} = \frac{Eh}{4} \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \\ & \text{Frihetsgrader} \end{array} \tag{6}$$

Assemblera till en global styvhetsmatris

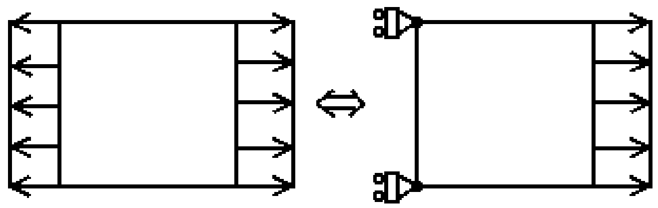
$$\Rightarrow \mathbf{K}_e = \underbrace{\frac{Eh}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 & & & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & & & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & & & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ -1 & -1 & 0 & 1 & & & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & & & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{e,1}} + \underbrace{\frac{Eh}{4}\begin{bmatrix} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ & & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ & & -1 & 0 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ & & -1 & -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ & & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{e,2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{K}_e = \frac{Eh}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

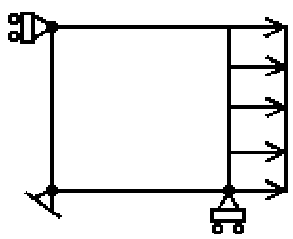
a) Enaxlig dragning

Randvillkor

För den här uppgiften får vi ta och fundera ut lämpliga randvillkor. Vi applicerar lika stor dragspänning på både vänster och höger sida, och det vore minst sagt trevligt att slippa beräkna konsekventa nodlaster för båda. Detta kan åstadkommas om vi låser fast nod 1 och 4 i x-led, lasten på väster sida kommer automatiskt med då som en reaktionspänning. Det här kan jämföras med införandet av symmetri.



Det här är dock inte helt tillräckligt. Vi vill förhindra stelkroppsrörelse, vilket just nu är möjligt i y-led. Det kan lätt fixas genom att låsa botten i y-led. Med det infört ser plåten ut såhär:



Lite mer matematiskt uttryckt blir randvillkoren:

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ 0 \\ D_5 \\ D_6 \\ 0 \\ D_8 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}_{\text{nod}} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ R_4 \\ 0 \\ 0 \\ R_7 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

<u>Lastvektor</u>

I det här fallet har vi bara en ytlast på element 2. Från formelbladet för ytlaster: $\mathbf{f}_s = \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS$ (9)

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{s,2} = \mathbf{f}_{s,2} = \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS = \int_{S_e} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} dS = \int_{S_e} \begin{bmatrix} N_1 t_x \\ N_1 t_y \\ N_2 t_x \\ N_2 t_y \\ N_3 t_x \\ N_3 t_y \end{bmatrix} dS$$

För det här fallet har vi att $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x = \sigma_0 \\ t_y = 0 \end{bmatrix}$. (10)

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{s,2} = \frac{\sigma_0}{l} \int_{S_e} \begin{bmatrix} l-y \\ 0 \\ x+y-l \\ 0 \\ l-x \\ 0 \end{bmatrix} dS \tag{11}$$

Lasten verkar på ytan som ligger på $x = l$, så vi sätter in det i integralen tillsammans med $dS = hdy$.

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{s,2} = \frac{\sigma_0 h}{l} \int_0^l \begin{bmatrix} l-y \\ 0 \\ y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dy = \frac{\sigma_0 h}{2l} \begin{bmatrix} 2ly - y^2 \\ 0 \\ y^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_0^l = \frac{\sigma_0 hl}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Dessa konsekventa nodlaster verkar på frihetsgraderna 3,4,5,6,7 resp. 8.

 rshen@kth.se

Totala lastvektorn fås som vanligt genom att summera alla lastbidrag.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{nod}} + \mathbf{F}_{\text{s}} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ R_4 \\ 0 \\ 0 \\ R_7 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sigma_0 hl}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \sigma_0 hl/2 \\ R_4 \\ \sigma_0 hl/2 \\ 0 \\ R_7 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

<u>Lös ut saker som vanligt</u>

$$\mathbf{F} = \mathbf{KD} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \sigma_0 hl/2 \\ R_4 \\ \sigma_0 hl/2 \\ 0 \\ R_7 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{Eh}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ 0 \\ D_5 \\ D_6 \\ 0 \\ D_8 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Stryk alla rader och kolumner där förskjutningen är 0 för att få ett reducerat ekvationssystem.

$$\Rightarrow \frac{\sigma_0 hl}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{Eh}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_3 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \{\text{MATLAB}\} \Leftrightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} D_3 \\ D_5 \\ D_5 \\ D_8 \end{bmatrix} = \frac{\sigma_0 l}{E} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Spänningsfördelningen inom elementen tas fram med formlerna i formelbladet:

<u>Element 1</u>:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{CBD}_{\text{e}} = \frac{E}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\sigma_0 l}{E} \begin{bmatrix} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \\ D_3 = 1 \\ D_4 = 0 \\ D_7 = 0 \\ D_8 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Element 2:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\mathbf{CBD}_e=\frac{E}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\frac{1}{l}\begin{bmatrix}0&0&1&0&-1&0\\0&-1&0&1&0&0\\-1&0&1&1&0&-1\end{bmatrix}\frac{\sigma_0 l}{E}\begin{bmatrix}D_3=1\\D_4=0\\D_5=1\\D_6=0\\D_7=0\\D_8=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\underline{\underline{\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_0\\0\\0\end{bmatrix}}}$$

Notera att enaxlig dragning ger en konstant töjning. Alltså kan det modelleras exakt med CST-element.

c) Egenvikt

Randvillkor

I den här uppgiften är plåten fritt upplagd. Vi låser nod 1 så att stelkroppsrörelse förhindras. Nod 2 sätter vi på en ”vagn”/rulle, dvs nod 2 kan förskjutas fritt i x-led, men låst i y-led.

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0\\0\\D_3\\0\\D_5\\D_6\\D_7\\D_8\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{F}_{\text{nod}}=\begin{bmatrix}R_1\\R_2\\0\\R_4\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\tag{15}$$

Lastvektor

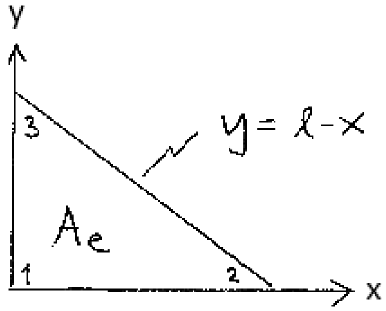
Lastvektorn kommer förstås bli annorlunda. Den här gången har vi en volymslast som beskrivs av:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}K_x\\K_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-\rho g\end{bmatrix}\tag{16}$$

Vi konsulterar formelbladet för volymslast och hittar:

$$\mathbf{f}_s=\int_{V_e}\mathbf{N}^T\mathbf{K}dV\tag{17}$$

Element 1



$$\mathbf{F}_{s,1}=\int_{V_e}\mathbf{N}^T\mathbf{K}dV=\int_{V_e}\begin{bmatrix}N_1 & 0\\ 0 & N_1\\ N_2 & 0\\ 0 & N_2\\ N_3 & 0\\ 0 & N_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_x\\ K_y\end{bmatrix}dV=\{dV=hdA\}=-\frac{\rho gh}{l}\iint_{A_e}\begin{bmatrix}0\\ l-x-y\\ 0\\ x\\ 0\\ y\end{bmatrix}dA=$$

$$=-\frac{\rho gh}{l}\underbrace{\int_0^l\int_0^{l-x}\begin{bmatrix}0\\ l-x-y\\ 0\\ x\\ 0\\ y\end{bmatrix}dy\,dx}_{\text{jag har valt att integrera över } y \text{ först}}=-\frac{\rho gh}{2l}\int_0^l\begin{bmatrix}0\\ l^2-2lx+x^2\\ 0\\ 2lx-2x^2\\ 0\\ l^2-2lx+x^2\end{bmatrix}dx=-\frac{\rho gh}{2l}\begin{bmatrix}0\\ l^2x-lx^2+x^3/3\\ 0\\ lx^2-2x^3/3\\ 0\\ l^2x-lx^2+x^3/3\end{bmatrix}_0^l=-\frac{\rho ghl^2}{6}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \quad (18)$$

Verkande i frihetsgraderna 1,2,3,4,7, resp. 8.

<u>Element 2</u>

$$\mathbf{F}_{s,2}=\int_{V_e}\mathbf{N}^T\mathbf{K}dV=\int_{V_e}\begin{bmatrix}N_1 & 0\\ 0 & N_1\\ N_2 & 0\\ 0 & N_2\\ N_3 & 0\\ 0 & N_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_x\\ K_y\end{bmatrix}dV=-\frac{\rho gh}{l}\iint_{A_e}\begin{bmatrix}0\\ l-y\\ 0\\ x+y-l\\ 0\\ l-x\end{bmatrix}dA=-\frac{\rho gh}{l}\int_0^l\int_{l-x}^l\begin{bmatrix}0\\ l-y\\ 0\\ x+y-l\\ 0\\ l-x\end{bmatrix}dydx$$

$$=-\frac{\rho gh}{2l}\int_0^l\begin{bmatrix}0\\ x^2\\ 0\\ x^2\\ 0\\ 2x^2-2lx\end{bmatrix}dx=-\frac{\rho gh}{6l}\begin{bmatrix}0\\ x^3\\ 0\\ x^3\\ 0\\ 2x^3-3lx^2\end{bmatrix}_0^l=-\frac{\rho ghl^2}{6}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \quad (19)$$

Verkande i frihetsgraderna 3,4,5,6,7, resp. 8.

Assemblera lastvektorn

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_{\text{nod}}+\mathbf{F}_{\text{s},1}+\mathbf{F}_{\text{s},2}=\begin{bmatrix}R_1\\R_2\\0\\R_4\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{\rho ghl^2}{6}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\ \\ \\0\\1\end{bmatrix}-\frac{\rho ghl^2}{6}\begin{bmatrix} \\ \\0\\1\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1\\R_2\\0\\R_4\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{\rho ghl^2}{6}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\\0\\1\\0\\2\end{bmatrix} \tag{20}$$

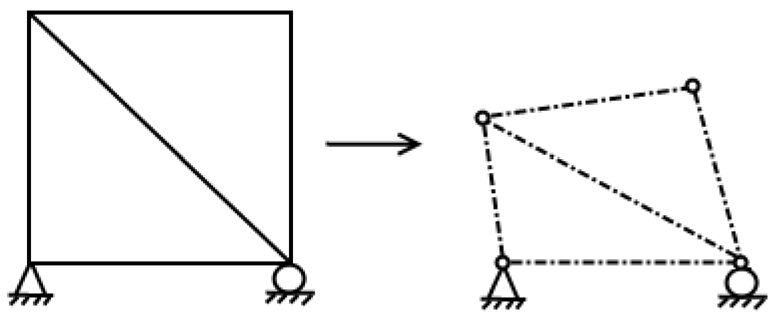
Lös som vanligt

$$\mathbf{F}=\mathbf{KD}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}R_1\\R_2\\0\\R_4\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{\rho ghl^2}{6}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\\0\\1\\0\\2\end{bmatrix}=\frac{Eh}{4}\begin{bmatrix}3&1&-2&-1&0&0&-1&0\\1&3&0&-1&0&0&-1&-2\\-2&0&3&0&-1&-1&0&1\\-1&-1&0&3&0&-2&1&0\\0&0&-1&0&3&1&-2&-1\\0&0&-1&-2&1&3&0&-1\\-1&-1&0&1&-2&0&3&0\\0&-2&1&0&-1&-1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\D_3\\0\\D_5\\D_6\\D_7\\D_8\end{bmatrix} \tag{21}$$

Stryk rader och kolumner där förskjutningen är 0 för att få ett reducerat ekvationssystem.

$$-\frac{\rho ghl^2}{6}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\2\end{bmatrix}=\frac{Eh}{4}\begin{bmatrix}3&-1&-1&0&1\\-1&3&1&-2&-1\\-1&1&3&0&-1\\0&-2&0&3&0\\1&-1&-1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_3\\D_5\\D_6\\D_7\\D_8\end{bmatrix}\Leftrightarrow\{\text{MATLAB}\}\Leftrightarrow\underline{\underline{\begin{bmatrix}D_3\\D_5\\D_6\\D_7\\D_8\end{bmatrix}=\frac{\rho gl^2}{24E}\begin{bmatrix}1\\-3\\-9\\-2\\-15\end{bmatrix}}} \tag{22}$$

Vi inser att det här är dåliga resultat. Skulle det här plottas skulle det se ut något i stil med:



Med fler element skulle resultatet bli bättre.

Spänningsfördelningen inom elementen tas fram med formlerna i formelbladet:

Element 1:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\mathbf{CBD}_{\mathrm{e}}=\frac{E}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\frac{1}{l}\begin{bmatrix}-1&0&1&0&0&0\\0&-1&0&0&0&1\\-1&-1&0&1&1&0\end{bmatrix}\frac{\rho g l^2}{24E}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\-2\\-15\end{bmatrix}\Leftrightarrow\underline{\underline{\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\frac{\rho g l}{24}\begin{bmatrix}1\\-15\\-1\end{bmatrix}}}$$

Element 2:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\mathbf{CBD}_{\mathrm{e}}=\frac{E}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\frac{1}{l}\begin{bmatrix}0&0&1&0&-1&0\\0&-1&0&1&0&0\\-1&0&1&1&0&-1\end{bmatrix}\frac{\rho g l^2}{24E}\begin{bmatrix}1\\0\\-3\\-9\\-2\\-15\end{bmatrix}\Leftrightarrow\underline{\underline{\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\frac{\rho g l}{24}\begin{bmatrix}-1\\-9\\1\end{bmatrix}}}$$

Katastrofalt dålig bild av verkligheten! Det kan dock göras bättre om man använder fler element och/eller symmetrivillkor.