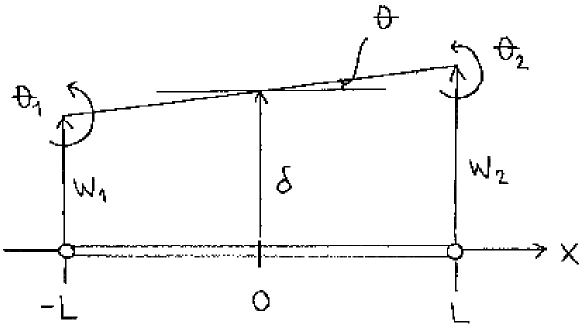
4.6 – Stelkroppsrörelse i balk

Bild av Veronica Wåtz



Givet: $$\begin{cases} w_1 = \delta - \theta L \\ w_2 = \delta + \theta L \\ \theta_1 = \theta_2 = \theta \end{cases} \qquad (1)$$

Sökt: Visa att förskjutningsansatsen kan beskriva en godtycklig stelkroppsrörelse, dvs $w(x) = \delta + \theta x$.

Lösning: Allmänt: $$w(\xi) = \mathbf{N}\mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = N_1 w_1 + N_2 \theta_2 + N_3 w_2 + N_4 \theta_2 \qquad (2)$$

Från formelbladet: $$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}\left(2 - 3\xi + \xi^3\right) & N_2 &= \frac{1}{4}\left(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\right)L \\ N_3 &= \frac{1}{4}\left(2 + 3\xi - \xi^3\right) & N_4 &= \frac{1}{4}\left(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\right)L \end{aligned} \qquad (3)$$

Sätt in (1) och (3) i (2). Här nedan har jag förberett en tabell så att man snabbt kan se vad varje term blir, vilket också borde förenkla summeringen.

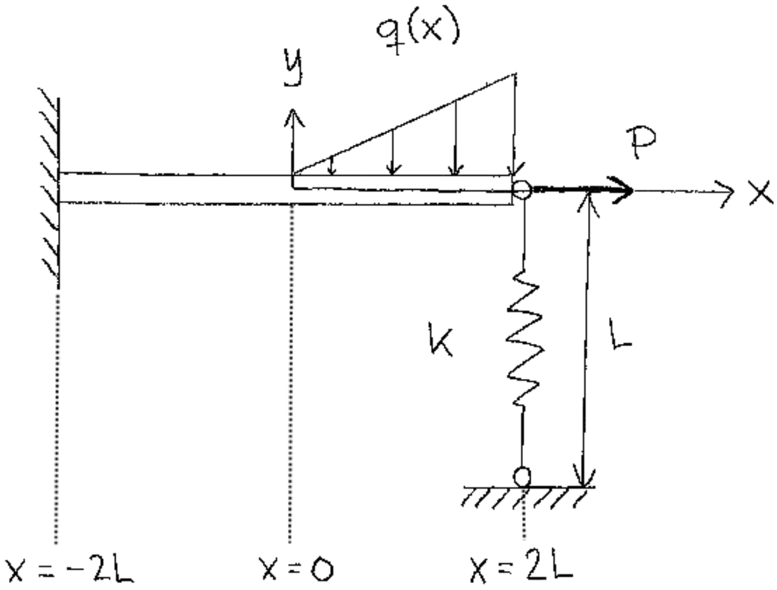
$4w(\xi) =$	Bidrag till $\delta -$term	Bidrag till $\theta L -$term
$4N_1 w_1 = \left(2 - 3\xi + \xi^3\right)\left(\delta - \theta L\right)$	$2 - 3\xi + \xi^3$	$-2 + 3\xi - \xi^3$
$4N_2 \theta_1 = \left(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\right)\theta L$	0	$1 - \xi - \xi^2 + \xi^3$
$4N_3 w_1 = \left(2 + 3\xi - \xi^3\right)\left(\delta + \theta L\right)$	$2 + 3\xi - \xi^3$	$2 + 3\xi - \xi^3$
$4N_4 \theta_2 = \left(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\right)\theta L$	0	$-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3$
$\Sigma =$	4	4ξ

$$\Rightarrow 4w(\xi) = (4)\delta + (4\xi)\theta L \Rightarrow w(\xi) = \delta + \theta L \xi \Leftrightarrow \left\{ \xi = \frac{x}{L} \right\} \Leftrightarrow \underline{\underline{w(x) = \delta + \theta x,\ \text{Q.E.D.}}}$$

Notera att δ är en stelkroppsförflyttning, och θ är en stelkroppsrotation.

5.4 – Blandad användning av stång- och balkelement

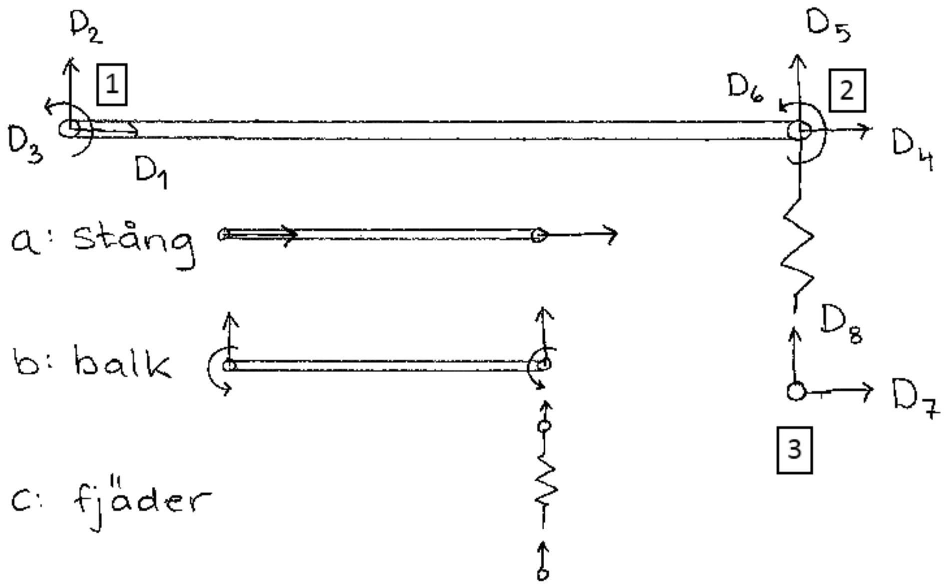
Bilder av Veronica Wåtz



Givet: $\begin{cases} k = \left(\eta \dfrac{EI}{L^3}\right), \; \eta = \dfrac{3}{2} \\ q(x) = -\dfrac{Q}{2L}\dfrac{x}{L}, \; 0 \le x \le 2L \end{cases}$

Sökt: $w(x), \; M(x)$

Lösning: Börja med att modellera geometrin med element. Balken utsätts för både böjning och normalkraft, så den bör modelleras med både stångelement och balkelement som sitter ihop i gemensamma noder. Fjädern kan modelleras med ett fjäderelement.



Steg 1: Beräkna $\mathbf{K}$.

Stångdelen och fjädern är lätta, så vi kan väl börja med dem:

$$\mathbf{K}_a = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Innehåller noderna 1 och 2, men viktigare i det här fallet, frihetsgraderna 1 och 4.

$$\mathbf{K}_c = k\begin{bmatrix} \mathbf{a}_c & -\mathbf{a}_c \\ -\mathbf{a}_c & \mathbf{a}_c \end{bmatrix}, \text{ där } \mathbf{a}_c = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}, \begin{cases} c = \cos 90° = 0 \\ s = \sin 90° = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{K}_c = \frac{3}{2}\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Innehåller noderna 2 och 3, frihetsgraderna 4,5,7 och 8.

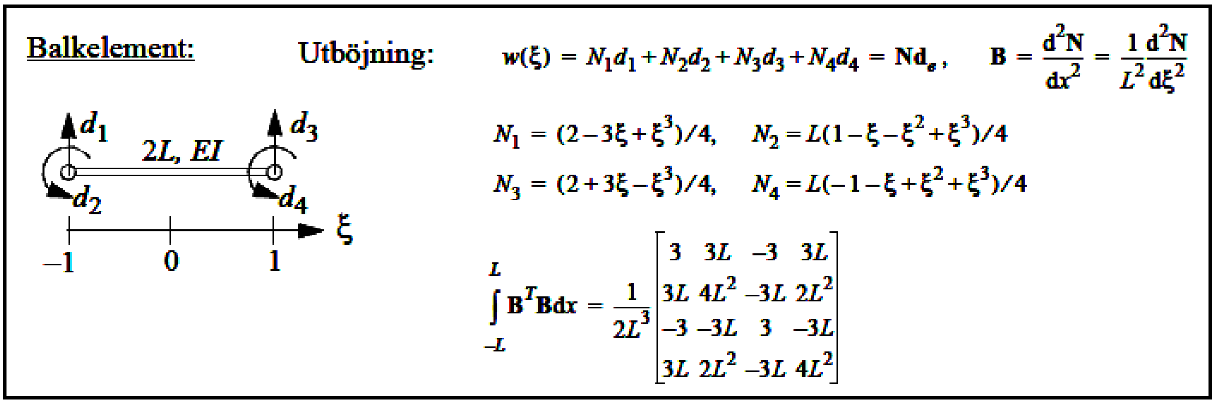
Alt. $\mathbf{K}_a = \frac{3}{2}\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$*, innehållandes frihetsgrader 5 och 8. Se bara till att assemblera rätt.*

Bara balkdelen kvar då. För balkar gäller:

$$\mathbf{k}_e = \int_{-a}^{a} \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dx, \text{ där } a = \text{halva elementlängden}$$

Obs! Finns INTE med i formelbladet uttryckt på det här sättet.

Om, och endast om, EI är konstant, kan det brytas ut ur integralen, och resten fås från formelbladet:


Balkelement: **Utböjning:** $w(\xi) = N_1 d_1 + N_2 d_2 + N_3 d_3 + N_4 d_4 = \mathbf{N}\mathbf{d}_e$, $\mathbf{B} = \frac{d^2\mathbf{N}}{dx^2} = \frac{1}{L^2}\frac{d^2\mathbf{N}}{d\xi^2}$

$N_1 = (2 - 3\xi + \xi^3)/4$, $N_2 = L(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)/4$

$N_3 = (2 + 3\xi - \xi^3)/4$, $N_4 = L(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)/4$

$$\int_{-L}^{L} \mathbf{B}^T\mathbf{B}dx = \frac{1}{2L^3}\begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & 2L^2 \\ -3 & -3L & 3 & -3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Notera att L i formelbladet motsvarar $2L$ för det här problemet eftersom vi har elementlängden $4L$.

$$\Rightarrow \mathbf{k}_b = EI\underbrace{\int_{-a}^{a} \mathbf{B}^T\mathbf{B}dx}_{\text{Finns i formelbladet}} = EI \cdot \frac{1}{2a^3}\begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ 3a & 4a^2 & -3a & 2a^2 \\ -3 & -3a & 3 & -3a \\ 3a & 2a^2 & -3a & 4a^2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Vi har tur eftersom balkelementet sammanfaller med x-axeln. Vi slipper alltså transformera.

$$\Rightarrow \mathbf{K}_{\mathrm{b}}=\mathbf{k}_{\mathrm{e}}=\{a=2L\}=\frac{EI}{16L^3}\begin{bmatrix}3 & 6L & -3 & 6L\\ 6L & 16L^2 & -6L & 8L^2\\ -3 & -6L & 3 & -6L\\ 6L & 8L^2 & -6L & 16L^2\end{bmatrix}$$

Innehåller noderna 1 och 2, frihetsgraderna 2,3,5 och 6.

Med elementstyvhetsmatriserna kända är det dags att assemblera. I tidigare övningar har det räckt att hålla koll på vilka noder en elementstyvhetsmatris behandlar. Eftersom noderna 1 och 2 är en kombination av både stång och balk får man istället gå över till det mer allmänna fallet: att hålla koll på de individuella frihetsgraderna.

Assemblera $\Rightarrow$

$$\mathbf{K}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\end{array}\ \text{frihetsgrader}\\ \begin{bmatrix}
\frac{EA}{4L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{4L} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{3EI}{16L^3} & \frac{3EI}{8L^2} & 0 & -\frac{3EI}{16L^3} & \frac{3EI}{8L^2} & 0 & 0\\
0 & \frac{3EI}{8L^2} & \frac{EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{8L^2} & \frac{EI}{2L} & 0 & 0\\
-\frac{EA}{4L} & 0 & 0 & \frac{EA}{4L} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\frac{3EI}{16L^3} & -\frac{3EI}{8L^2} & 0 & \frac{27EI}{16L^3} & -\frac{3EI}{8L^2} & 0 & -\frac{3EI}{2L^3}\\
0 & \frac{3EI}{8L^2} & \frac{EI}{2L} & 0 & -\frac{3EI}{8L^2} & \frac{EI}{L} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI}{2L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{2L^3}
\end{bmatrix}\end{array}
\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}\right\}\text{nod 1}\\ \left.\begin{array}{c}4\\5\\6\end{array}\right\}\text{nod 2}\\ \left.\begin{array}{c}7\\8\end{array}\right\}\text{nod 3}\end{array}$$

<u>Steg 2</u>: Beräkna $\mathbf{F}$.

$$q(x)=\begin{cases}0, & -2L\le x<0\\ -\frac{Q}{2L}\frac{x}{L}, & 0\le x\le 2L\end{cases}\Leftrightarrow\left\{\xi=\frac{x}{2L}\right\}\Leftrightarrow q(x)=\begin{cases}0, & -1\le\xi<0\\ -\frac{Q}{L}\xi, & 0\le\xi\le 1\end{cases}\tag{4}$$

Den utbredda lasten angriper balkdelen, stångdelen behöver inte behandlas då den inte tar upp last i den riktningen. Notera tecken på den utbredda lasten!

$$\underset{\text{body force, element b}}{\mathbf{F}_{\mathrm{b,b}}}=\int_{-2L}^{2L}\mathbf{N}_{\mathrm{balk}}^{T}q(x)\,dx=\int_{0}^{2L}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2-3\xi+\xi^3\\ 2L\left(1-\xi-\xi^2+\xi^3\right)\\ 2+3\xi-\xi^3\\ 2L\left(-1-\xi+\xi^2+\xi^3\right)\end{bmatrix}\left(-\frac{Q}{L}\xi\right)dx=\{dx=2Ld\xi\}=$$

$$= -\frac{Q}{2}\int_0^1 \begin{bmatrix} 2\xi - 3\xi^2 + \xi^4 \\ 2L\left(\xi - \xi^2 - \xi^3 + \xi^4\right) \\ 2\xi + 3\xi^2 - \xi^4 \\ 2L\left(-\xi - \xi^2 + \xi^3 + \xi^4\right) \end{bmatrix} d\xi = -\frac{Q}{2}\begin{bmatrix} \xi^2 - \xi^3 + \frac{\xi^5}{5} \\ 2L\left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} + \frac{\xi^5}{5}\right) \\ \xi^2 + \xi^3 - \frac{\xi^5}{5} \\ 2L\left(-\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^4}{4} + \frac{\xi^5}{5}\right) \end{bmatrix}_0^1 = \begin{bmatrix} -\frac{Q}{10} \\ -\frac{7Q}{60}L \\ -\frac{9Q}{10} \\ \frac{23Q}{60}L \end{bmatrix} \tag{5}$$

Dessa krafter verkar på frihetsgraderna 2,3,5 respektive 6.

Nodlasten stoppas in i en global vektor direkt:

$$\mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ M_{R3} \\ P \\ 0 \\ 0 \\ R_7 \\ R_8 \end{bmatrix} \tag{6}$$

I exempelsamlingens lösningsförslag sätter man $R_7 = 0$ direkt här eftersom fjädern inte kan överföra krafter i x-led. Alternativt kan man göra som vanligt och få fram krafterna som $\mathbf{F} = \mathbf{KD}$.

Assemblera lasterna till en global lastvektor:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_b = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ M_{R3} \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -Q/10 \\ -7QL/60 \\ 0 \\ -9Q/10 \\ 23QL/60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 - Q/10 \\ M_{R3} - 7QL/60 \\ P \\ -9Q/10 \\ 23QL/60 \\ 0 \\ R_8 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Steg 3: Lös ut okända i $\mathbf{D}$ på det gamla hederliga sättet via $\mathbf{F}=\mathbf{KD}$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \quad \frac{Q}{10} \\ M_{R3} \quad \frac{7Q}{60}L \\ P \\ -\frac{9Q}{10} \\ \frac{23Q}{60}L \\ 0 \\ R_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{4L} & 0 & 0 & \frac{EA}{4L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{16L^3} & \frac{3EI}{8L^2} & 0 & \frac{3EI}{16L^3} & \frac{3EI}{8L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{8L^2} & \frac{EI}{L} & 0 & \frac{3EI}{8L^2} & \frac{EI}{2L} & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{4L} & 0 & 0 & \frac{EA}{4L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{16L^3} & -\frac{3EI}{8L^2} & 0 & \frac{27EI}{16L^3} & -\frac{3EI}{8L^2} & 0 & -\frac{3EI}{2L^3} \\ 0 & \frac{3EI}{8L^2} & \frac{EI}{2L} & 0 & -\frac{3EI}{8L^2} & \frac{EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI}{2L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{2L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notera att D_4 praktiskt taget är utskrivet.

$$\Rightarrow \begin{cases} P = \frac{EA}{4L} D_4 + 0 \cdot D_5 + 0 \cdot D_6 \\ \begin{bmatrix} -\frac{9Q}{10} \\ \frac{23QL}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27EI}{16L^3} & -\frac{3EI}{8L^2} \\ -\frac{3EI}{8L^2} & \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_4 = \frac{4PL}{EA} \\ D_5 = -\frac{22}{45}\frac{QL^3}{EI} \\ D_6 = \frac{QL^2}{5EI} \end{cases} \tag{8}$$

Steg 4: Ta fram det vi ville ha, utböjningen och tvärsnittsmomentet.

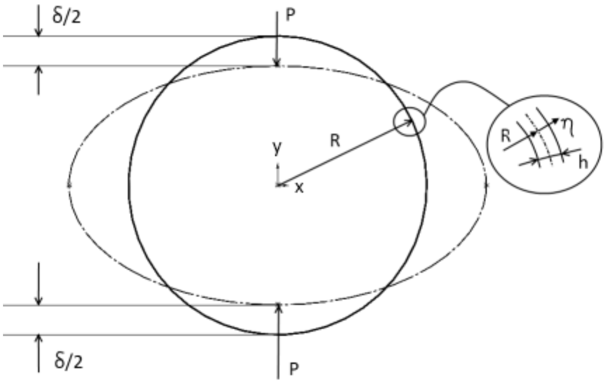
Som tur var sammanfaller balkens koordinatsystem med globala x-axeln, och vi behöver alltså inte tänka på transformationer hit och dit.

$$\text{Utböjning: } w(\xi) = \mathbf{N}_{\text{balk}} \mathbf{d}_e = \underbrace{\begin{bmatrix} 2-3\xi+\xi^3 \\ 2L\left(1-\xi-\xi^2+\xi^3\right) \\ 2+3\xi-\xi^3 \\ 2L\left(-1-\xi+\xi^2+\xi^3\right) \end{bmatrix}^T}_{\text{Tar för stor plats att skriva på horisontell ledd}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{22}{45}\frac{QL^3}{EI} \\ \frac{QL^2}{5EI} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\Rightarrow w(\xi) = \frac{QL^3}{EI}\left(-\frac{62}{45}-\frac{28}{15}\xi+\frac{2}{5}\xi^2+\frac{8}{9}\xi^3\right) \Leftrightarrow \underline{\underline{w(x) = \frac{QL^3}{EI}\left(-\frac{62}{45}-\frac{14}{15}\frac{x}{L}+\frac{1}{10}\frac{x^2}{L^2}+\frac{1}{9}\frac{x^3}{L^3}\right)}} \tag{10}$$

$$M(x) = -EIw''(x) = -EI\mathbf{B}_{\text{balk}}\mathbf{d}_e \Rightarrow \underline{\underline{M(x) = QL\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\frac{x}{L}\right)}} \tag{11}$$

5.6 – Symmetri



Givet: Om $R \gg h$ kan man bestämma fjäderkonstanten till $k = \frac{4\pi}{(\pi^2 - 8)} \frac{EI}{R^3}$.

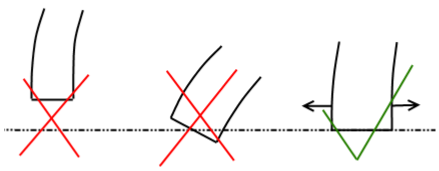
Sökt: Ta fram symmetrivillkor.

Lösning:

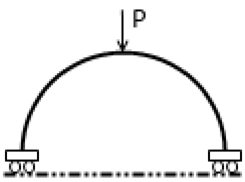
Det viktiga att ta med sig från den här uppgiften är hur man kan modellera symmetrivillkor i FEM med hjälp av randvillkor. Varje gång man kan införa ett symmetriplan halverar man det som behöver modelleras, vilket är väldigt trevligt.

I det här fallet kan vi börja med att konstatera att problemet har en övre och undre halva som är symmetriska. När man ska modellera det här bör man tänka igenom randvillkoren:

1. De två halvorna sitter ihop i planet och får varken tryckas in i varandra eller dras isär.
   $\Rightarrow u_y = 0 \text{ vid } y = 0$
2. Materialet måste sticka upp normalt mot symmetriplanet, annars skulle förskjutningarna motsvara både en sprickbildning och att materialet krockar in i spegelbilden, se bilden nedan.
   $\Rightarrow \theta = 0$
3. De två halvorna kan röra sig fritt i x-led, spegelbilden följer med, se bilden nedan.

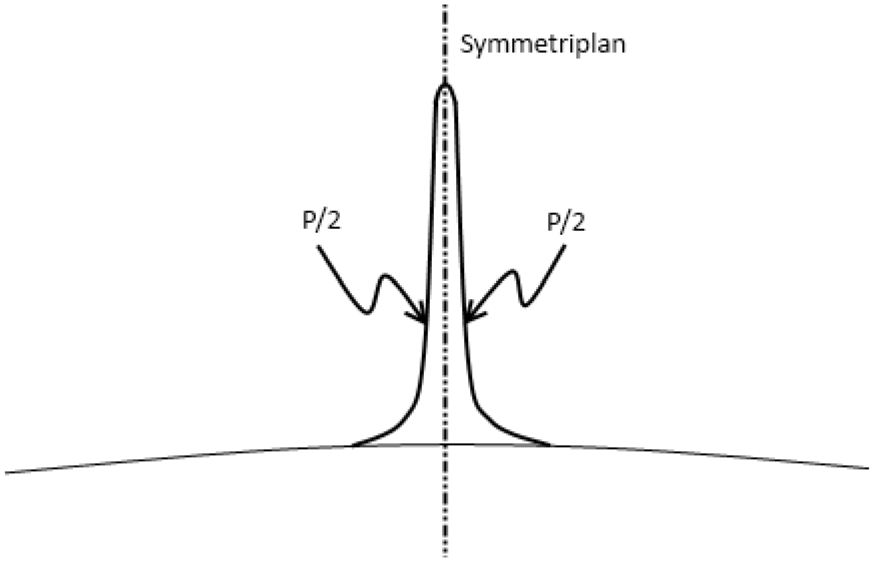


Detta uppfylls om man sätter ett randvillkor som ser ut såhär:



Vi ser att vänster och höger sida fortfarande är spegelbilder av varandra. Vad gäller förskjutningar kan vi använda vagnen som randvillkor även här. För att inse hur man ska dela upp punktkraften tänker vi oss hur lasten skulle se ut i verkligheten.

I verkligheten är punktlaster en väldigt koncentrerad utbredd last. Om vi zoomar in där lasten angriper skulle det kunna se ut såhär:



Nu ser man tydligt hur halva kraften angriper på höger halva, och halva kraften på vänster halva. Genom att införa ett andra symmetrivillkor har problemet reducerats till en fjärdedel.

<u>Slutresultat</u>: Betydligt enklare problem!