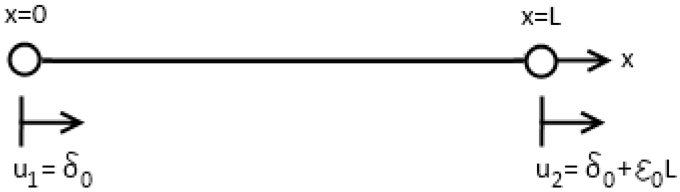
4.1 – Förskjutning – Töjning



a)

Sökt: Visa att töjningen i elementet är $\varepsilon(x)=\varepsilon_0$.

Lösning: I grundkursen fick man lära sig att $\varepsilon_x=\dfrac{du}{dx}$. (1)

I FEM får man lära sig att $u=N_1u_1+N_2u_2$. (2)

Det här är ett linjärt element som går mellan två noder, en vid $x=0$ och en vid $x=L$, så

$$\begin{cases} N_1=1-\xi=1-\dfrac{x}{L} \\ N_2=\xi=\dfrac{x}{L} \end{cases} \tag{3}$$

Sätt in (3) i (2) $\Rightarrow u(x)=\underbrace{\left(1-\dfrac{x}{L}\right)}_{N_1}\underbrace{\delta_0}_{u_1}+\underbrace{\dfrac{x}{L}}_{N_2}\underbrace{(\delta_0+\varepsilon_0 L)}_{u_2}=\ldots=\delta_0+\varepsilon_0 x$ (4)

Med ett generellt uttryck för förskjutning känt är det bara att derivera för att få töjning, se (1):

$$\varepsilon_x=\frac{d}{dx}(\delta_0+\varepsilon_0 x)=\varepsilon_0\text{ , Q.E.D.}$$

Ett alternativ är att derivera från början genom att sätta in (2) i (1):

$$\varepsilon_x=\frac{du}{dx}=\underbrace{\frac{dN_1}{dx}}_{-\frac{1}{L}}\underbrace{u_1}_{\text{konstant}}+\underbrace{\frac{dN_2}{dx}}_{\frac{1}{L}}\underbrace{u_2}_{\text{konstant}}=-\frac{1}{L}\delta_0+\frac{1}{L}(\delta_0+\varepsilon_0 L)=\varepsilon_0$$

b)

Sökt: Visa att man får en stelkroppsförflyttning om $\varepsilon_0=0$.

Förskjutningen beskriver hur mycket en nod har förflyttat sig från start. Den säger däremot inte om förflyttningen är från töjning, eller från att kroppen bara har hängt med i en rörelse. En stelkroppsrörelse kännetecknas av två saker:
1. Det finns ingen töjning.
2. Alla kroppens delar (dvs. noder) förflyttas lika mycket, och åt samma håll.

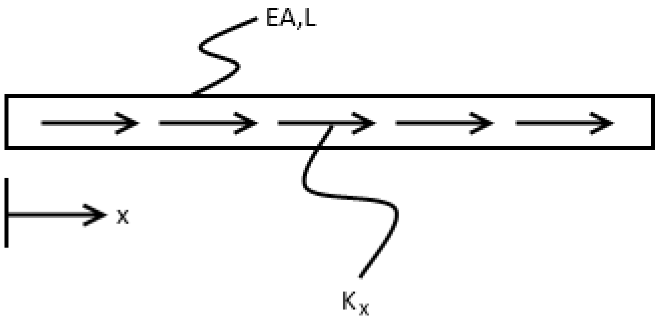
Lösning: $\varepsilon_x(x)=\varepsilon_0=0\Rightarrow$ ingen töjning $\Rightarrow$ 1. är ok!

$$\left.\begin{aligned} u_1&=\delta_0 \\ u_2&=\delta_0+\underbrace{\varepsilon_0}_{=0}L \end{aligned}\right\}\Rightarrow u_1=u_2=\delta_0\Rightarrow \text{ noderna flyttas lika mycket och åt samma håll }\Rightarrow \text{2. är ok!}$$

Båda kriterier uppfylda $\Rightarrow$ Stelkroppsförflyttning!

3.3 – Start/Svag Form på Stång

a)



Givet: Stark form: $\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)+K_xA=0$ (1)

Stark form = diff. ekvation som beskriver förskjutningen exakt i varje punkt.

Sökt: Visa att $\int_0^L \frac{dv}{dx}EA\frac{du}{dx}dx=\int_0^L vK_xAdx+\left[v\ \sigma A\right]_0^L$ (dvs. visa svag form) (2)

där $\sigma(x)$ är normalspänningen, $A(x)$ är tvärsnittsarean och $v(x)$ är en godtycklig viktfunktion.

Svag form = samma ekvation men uttryckt med integraler. Löses gärna approximativt med FEM, och blir därför inte nödvändigtvis exakt i varje punkt, men ofta lättare än en svår diff. ekvation. Svaret blir dock bättre om geometrin blir beskriven med fler element, och eftersom det är en dator, och inte du själv, som utför slavarbetet med att invertera dina matriser kan man lösa hyfsat jobbiga problem på rimlig tid med rimlig noggrannhet.

Lösning: Vi vill få stark form till svag form, och visa att vi får samma svaga form som i uppgiften.

Steg 1: Utgå ifrån stark form, förläng med en **viktsfunktion** och **integrera** över längden. Dela gärna upp integralen i sina termer redan från början.

$$\underbrace{\int_0^L v\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)dx}_{\text{Den här termen partialintegreras i steg 2}}+\int_0^L vK_xAdx=0 \quad (3)$$

Steg 2: **Partialintegrera** termen som innehåller andraderivatan, målet är att slippa andraderivatan.

Från Beta s. 141: $\int_{x_1}^{x_2} g(x)f(x)dx=\left[g(x)F(x)\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2} g'(x)F(x)dx$

$$\Rightarrow \int_0^L \underbrace{v}_{g(x)}\underbrace{\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{f(x)}dx=\left[\underbrace{v}_{g(x)}\underbrace{EA\frac{du}{dx}}_{F(x)}\right]_0^L-\int_0^L \underbrace{\frac{dv}{dx}}_{g'(x)}\underbrace{EA\frac{du}{dx}}_{F(x)}dx+\int_0^L vK_xAdx=0 \quad (4)$$

Sätt in den partialintegrerade versionen av termen i (3)

$$\Rightarrow \left[vEA\frac{du}{dx}\right]_0^L-\int_0^L \frac{dv}{dx}EA\frac{du}{dx}dx+\int_0^L vK_xAdx=0 \quad (5)$$

Steg 3: Använd **Hookes lag** för att få $\left[v\ \sigma A\right]_0^L$ -termen.

Hookes lag i 1D: $\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{du}{dx} \Rightarrow EA\dfrac{du}{dx} = \sigma A$ (6)

Sätt in (6) i (5) $\Rightarrow \left[v\ \sigma A\right]_0^L - \int_0^L \dfrac{dv}{dx} EA \dfrac{du}{dx} dx + \int_0^L v K_x A dx = 0 \Leftrightarrow$ (kasta om) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\int_0^L \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_0^L v K_x A dx + \left[v\ \sigma A\right]_0^L}}\text{, Q.E.D.}$$

Notera att alla termer innehåller $A(x)$. Den behöver inte vara konstant, så förkorta inte bort den!

b)

Sökt: Ta fram FEM-ekvationen (d.v.s. identifiera $\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e$) med Galerkins metod.

*Galerkins metod = Använd **samma formfunktion** för $v(x)$ som för $u(x)$.*

Lösning:

För den som har glömt: $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$, och $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{AB}$ om $\mathbf{AB}$ är symmetrisk. En skalär är givetvis symmetrisk! Notera att multiplikation av en (1xn) matris med en (nx1) ger deras skalärprodukt.

$$u = \underbrace{N_1 u_1 + N_2 u_2}_{\text{skalärprodukt av } \mathbf{Nd}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e\text{, konstant}} = \mathbf{Nd}_e \tag{7}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(x)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{d\mathbf{N}}{dx}\mathbf{d}_e = \mathbf{Bd}_e \tag{8}$$

$$v = N_1 \beta_1 + N_2 \beta_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}\text{, konstant}} = \underbrace{\mathbf{N}\boldsymbol{\beta}}_{\text{skalär}} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}^T \tag{9}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dN_1}{dx} \beta_1 + \frac{dN_2}{dx} \beta_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(x)} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \frac{d\mathbf{N}}{dx}\boldsymbol{\beta} = \underbrace{\mathbf{B}\boldsymbol{\beta}}_{\text{skalär}} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{B}^T \tag{10}$$

Sätt in det här i den svaga formen.

$$\int_{L_e} \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_{L_e} v(x) K_x A dx + \left[v(x)\sigma A\right]_{x_1}^{x_2} = \int_{L_e} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{B}^T EA\mathbf{B}\mathbf{d}_e dx = \int_{L_e} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}^T K_x A dx + \left[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}^T \sigma A\right]_{x_1}^{x_2} \Leftrightarrow$$

Eftersom både $\boldsymbol{\beta}^T$ och $\mathbf{d}_e$ är <u>konstanta</u> får de brytas ut ur integralerna. Kom ihåg att multiplikationsordningen spelar roll för matriser, så de måste brytas ut "åt rätt håll".

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}^T \left(\int_{L_e} \mathbf{B}^T EA\mathbf{B}dx \; \mathbf{d}_e \right) = \boldsymbol{\beta}^T \left(\int_{L_e} \mathbf{N}^T K_x A dx + \left[\mathbf{N}^T \sigma A \right]_{x_1}^{x_2} \right) \Leftrightarrow$$

Notera att $\boldsymbol{\beta}^T$ *bryts ut från alla termer, och eftersom ekvationen måste gälla oavsett vilka godtyckliga värden man väljer i* $\boldsymbol{\beta}^T$*, och inte bara om man råkar välja en massa nollor, så måste det som står inom parenteserna vara lika med varandra. Eller lite slarvigt uttryckt, förkorta båda led med* $\boldsymbol{\beta}^T$*.*

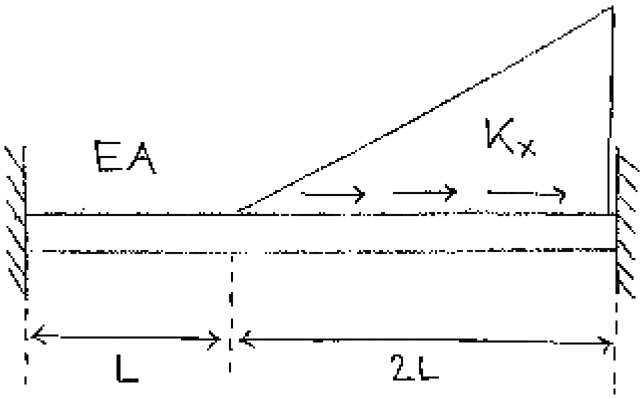
$$\Leftrightarrow \int_{L_e} \mathbf{B}^T EA\mathbf{B}dx \; \mathbf{d}_e = \int_{L_e} \mathbf{N}^T K_x A dx + \left[\mathbf{N}^T \sigma A \right]_{x_1}^{x_2} \tag{11}$$

Ur ekvation (11) kan man identifiera det som bildar FEM-ekvationen:

$$\underbrace{\int_{L_e} \mathbf{B}^T EA\mathbf{B}dx}_{\mathbf{k}_e} \; \underset{\mathbf{d}_e}{\mathbf{d}_e} = \underbrace{\underbrace{\int_{L_e} \mathbf{N}^T K_x A dx}_{\mathbf{f}_b\text{, volymslast (}\mathbf{b}\text{ody)}} + \underbrace{\left[\mathbf{N}^T \sigma A \right]_{x_1}^{x_2}}_{\mathbf{f}_s\text{, ytlast (}\mathbf{s}\text{urface)}}}_{\mathbf{f}_e} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e}} \text{, } \textit{Q.E.D.} \tag{12}$$

c)

Bilder ritade av Veronica Wåtz.



Givet: $K_x = \dfrac{Q}{2AL}\left(\dfrac{x}{L}-1\right), Q = \text{totala lasten}$

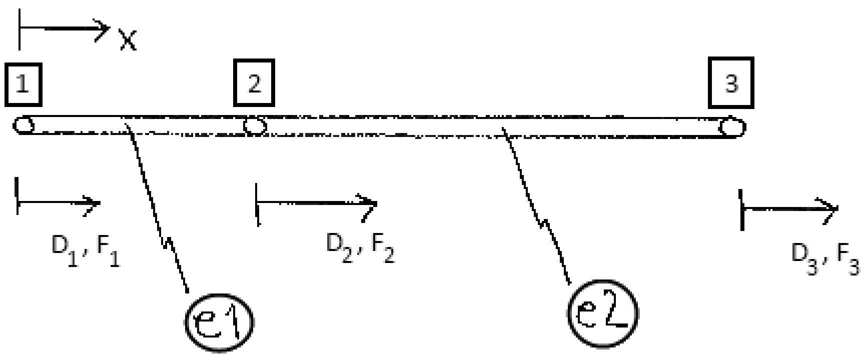
$$N(x=0)=\frac{2}{9}Q,\ N(x=3L)=-\frac{7}{9}Q$$

Exakt lösning: $u(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{9}\dfrac{QL}{EA}\dfrac{x}{L}, 0\le x\le L\\[2mm] \dfrac{1}{36}\dfrac{QL}{EA}\left[3-\dfrac{x}{L}+9\left(\dfrac{x}{L}\right)^2-3\left(\dfrac{x}{L}\right)^3\right], L<x\le 3L\end{cases}$

Randvillkor: $\begin{cases}D_1=0\Rightarrow R_1=?\\ \mathrm{D}_2=? \qquad F_2\approx\text{känd}\\ D_3=0\Rightarrow R_3=?\end{cases}$

Sökt: Nodförskjutningar och reaktionskrafter med FEM, jämförelse av förskjutningarna FEM vs. Exakt.

Lösning: Börja med att dela in stången i två element.



Tips! Att börja med målet är ett bra sätt att komma på hur man tar sig dit. Ställ upp ekvationen med svaret du är ute efter, och se vad som saknas för att komma dit.

$$\mathbf{KD}=\mathbf{F}=\mathbf{F}_{\mathrm{b}\leftarrow\mathrm{body}}+\mathbf{F}_{\mathrm{s}\leftarrow\mathrm{surface}} \tag{13}$$

”Body” och ”surface” kan kännas lite fånigt i 1D, och vad som ska kallas vad är lite… fånigt, men någon form av namn kan vara trevligt för att hålla saker organiserade. Krafter som angriper i elementens volym, t ex gravitation och tröghet, hamnar

under $\mathbf{F}_\mathrm{b}$ *medan krafter som verkar på elementens yta hamnar under* $\mathbf{F}_\mathrm{s}$ *, t ex punktkrafter på noder. Uppdelningen blir förstås naturligare när man jobbar i 2D och 3D.*

Lösningsstrategi:

1. Behöver $\mathbf{K} \Rightarrow$ Beräkna elements $\mathbf{K}_\mathrm{e}$ och assemblera till ett globalt $\mathbf{K}$.
2. Behöver $\mathbf{F} \Rightarrow$ Gör om volymslaster till nodlaster (konsekventa nodlaster) och assemblera till $\mathbf{F}_\mathrm{b}$.
3. Lägg till övriga nodlaster, $\mathbf{F}_\mathrm{s}$, för att få en fullständig lastvektor, $\mathbf{F}$.
4. Lös ut förskjutningarna ur FEM-ekvationen.
5. Matrismultiplicera för att få fram det sista okända i lastvektorn.
6. Jämför med exakt lösning.

__Steg 1__: Jag tänkte visa två sätt att räkna ut $\mathbf{K}_\mathrm{e}$.

__Alternativ 1__ – som i övning 1.

Det är ingen skillnad mellan en stång och en fjäder. Stänger beskrivs med $k = \dfrac{EA}{L_\mathrm{e}}$.

$$\Rightarrow \mathbf{K}_\mathrm{e} = k_i \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L_\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

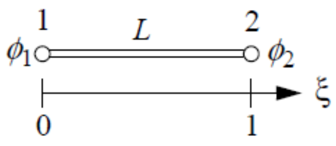
__Alternativ 2__ – Från formelbladet eller från svaret i b).

Allmänt gäller att $\mathbf{K}_\mathrm{e} = \int\limits_{V_\mathrm{e}} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV$. I en dimension gäller att (material)styvhetsmatrisen $\mathbf{C}$ blir E ,

och dV blir $A(x)dx$, och vi får det vi härledde i b): $\mathbf{K}_\mathrm{e} = \int\limits_{L_\mathrm{e}} \mathbf{B}^T EA \mathbf{B} dx$ (15)

ENAXLIGA FINITA ELEMENT ENAXLIGT (1D)

__Kontinuumelement (stång, värmeledning, etc.):__



$$\phi(\xi) = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \qquad N_1 = 1-\xi \qquad N_2 = \xi$$

$$\int_0^L \mathbf{N}^T\mathbf{N}\,\mathrm{d}x = \{\mathrm{d}x = L\,\mathrm{d}\xi\} = \frac{L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \int_0^L \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}^T}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Använd formlerna på sid 3.7 (16) i ExSam: välj $N_1 = 1-\xi, N_2 = \xi \Rightarrow \int\limits_0^{L_\mathrm{e}} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx = \dfrac{1}{L_\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (16)

Sätt in (16) i (15) $\Rightarrow \mathbf{K}_\mathrm{e} = \int\limits_0^{L_\mathrm{e}} \mathbf{B}^T EA \mathbf{B} dx = EA \int\limits_0^{L_\mathrm{e}} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx = \dfrac{EA}{L_\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (17)

I vilket fall får man samma formel för elementstyvhetsmatrisen, och därmed:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{K}_{e,1} &= \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}, \text{ noder 1 och 2}\\ \mathbf{K}_{e,2} &= \frac{EA}{2L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}, \text{ noder 2 och 3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \mathbf{K} = \frac{EA}{2L}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 2+1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} = \frac{EA}{2L}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \tag{18}$$

__Steg 2__:

Laster som inte angriper på noderna (gäller både volyms- och ytlaster) måste konverteras till "konsekventa nodlaster". Det kan jämföras med att du sitter på en fyrbent stol och vill veta vad för kraft varje stolsben känner av. Hur kraften fördelas mellan stolsbenen beror på hur du lägger vikten, och på samma sätt får olika noder i ett element olika stor del av volymslasten beroende på var den ligger.

Allmänt gäller: $\mathbf{F}_b = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K}_b dV$. I det här 1D-fallet är $\mathbf{K}_b = K_x$, $N = [N_1 \quad N_2]$, $dV = A(x)dx$, och vi får samma som i svaret i b) $\Rightarrow \mathbf{F}_b = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K}_b dV = \int_{L_e} \mathbf{N}^T K_x A dx$.

Jag hängde på ett index b i $\mathbf{K}_b$ så att vi inte råkar blanda ihop den med globala styvhetsmatrisen.

$$\Rightarrow \mathbf{F}_b = \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix}N_1\\ N_2\end{bmatrix} K_x A dx = \begin{bmatrix}\int_{x_1}^{x_2} N_1 K_x A dx\\ \int_{x_1}^{x_2} N_2 K_x A dx\end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{c}\text{Integration av vektor görs elementvis,}\\ \text{det är inte svårare än så!}\\ \text{Jag skriver dock i första formen, det tar mindre plats.}\end{array}$$

I element 1 finns inga volymslaster, så $K_x = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{b,1} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$, (bidrag i nod 1 och nod 2). (19)

I element 2 gäller $\mathbf{F}_b = \int_{x_2}^{x_3} \underbrace{\begin{bmatrix}N_2\\ N_3\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\frac{Q}{2AL}\left(\frac{x}{L}-1\right)}_{K_x} A dx = \frac{Q}{2L}\int_{x_2}^{x_3} \begin{bmatrix}1-\xi\\ \xi\end{bmatrix}\left(\frac{x}{L}-1\right)dx$ (20)

Formfunktionerna i formelbladet är uttryckta i ξ, men dx och K_x är uttryckta i x. En av koordinaterna måste bytas ut så att allt får samma. Det handlar om en vanlig enkel linjär transform, och i ett 1D-fall är det samma sak som räta linjens ekvation.

$$\left.\begin{aligned} & x = k\xi + m\\ & \xi = 0 \leftrightarrow x = L \Rightarrow m = L\\ & \xi = 1 \leftrightarrow x = 3L \Rightarrow k = 2L\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2L\xi + L\\ dx = 2Ld\xi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{L}-1\right)\\ d\xi = \dfrac{dx}{2L}\end{cases} \tag{21}$$

Nu kan man byta ut antingen ξ eller x, båda vägarna fungerar. Att byta ut x och integrera i elementets eget koordinatsystem brukar dock vara enklast eftersom man får integrera mellan 0 och 1, så vi gör det!

(21) i (20) $\Rightarrow \mathbf{F}_\text{b} = \frac{Q}{2L}\int_{x_2}^{x_3}\begin{bmatrix}1-\xi\\ \xi\end{bmatrix}\left(\frac{x}{L}-1\right)dx = \frac{Q}{\cancel{2L}}\int_0^1\begin{bmatrix}1-\xi\\ \xi\end{bmatrix}\left[\left(2\xi\cancel{+1}\right)\cancel{-1}\right]\cancel{2L}\,d\xi =$

$$= Q\int_0^1\begin{bmatrix}1-\xi\\ \xi\end{bmatrix}2\xi\,d\xi = 2Q\int_0^1\begin{bmatrix}\xi-\xi^2\\ \xi^2\end{bmatrix}d\xi = 2Q\begin{bmatrix}\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}\\ \frac{\xi^3}{3}\end{bmatrix}_0^1 \Rightarrow \mathbf{F}_{\text{b},2} = \frac{Q}{3}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \text{(nod 2 och nod 3)} \qquad (22)$$

Assemblera (19) och (22) till en global volymslastvektor:

$$\mathbf{F}_\text{b} = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_{\text{b},1}} + \underbrace{\frac{Q}{3}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_{\text{b},2}} = \frac{Q}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} \qquad (23)$$

Här ser man, precis som för elementstyvhetsmatriserna, att det är vilka noder som ingår i elementet som styr vilka platser i globala vektorn som påverkas.

<u>Steg 3</u>: Totala kraftvektorn ska beräknas.

När man lägger till de krafter som verkar direkt på noderna är det lättast att jobba direkt med globala kraftvektorn. Notera att även reaktionskrafter ska tas med som yttre krafter, lätt att glömma!

$$\mathbf{F}_\text{s} = \begin{bmatrix}R_1\\0\\R_3\end{bmatrix} \qquad (24)$$

Lägg ihop med volymslasten för att få totala kraftvektorn.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\text{b} + \mathbf{F}_\text{s} = \frac{Q}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}R_1\\0\\R_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R_1\\Q/3\\2Q/3+R_3\end{bmatrix} \qquad (25)$$

<u>Steg 4</u>: Lös ut förskjutningarna ur FEM-ekvationen.

$$\mathbf{KD} = \mathbf{F} \Leftrightarrow \frac{EA}{2L}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\D_2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R_1\\Q/3\\2Q/3+R_3\end{bmatrix} \qquad (26)$$

Stryk rader och kolumner där $D_i = 0 \Rightarrow \frac{EA}{2L}3D_2 = \frac{Q}{3} \Leftrightarrow \underline{\underline{D_2 = \frac{2}{9}\frac{QL}{EA}}}$ (27)

<u>Steg 5</u>: Sätt in (27) i (26) och beräkna lastvektorn. Därifrån kan reaktionskrafterna bestämmas.

$$\frac{\cancel{EA}}{\cancel{2L}}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\frac{\cancel{2L}}{\cancel{EA}}\frac{Q}{9}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{Q}{9}\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R_1\\Q/3\\2Q/3+R_3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-\frac{2Q}{9} = R_1\\ -\frac{Q}{9} = \frac{2Q}{3}+R_3\end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{\begin{cases}R_1 = -\frac{2Q}{9}\\ R_3 = -\frac{7Q}{9}\end{cases}}} \qquad (28)$$

<u>Nodkrafterna INTE är samma sak som reaktionskrafterna</u>! Många glömmer det här och missar tentapoäng!

Steg 6: Jämför med exakt lösning.

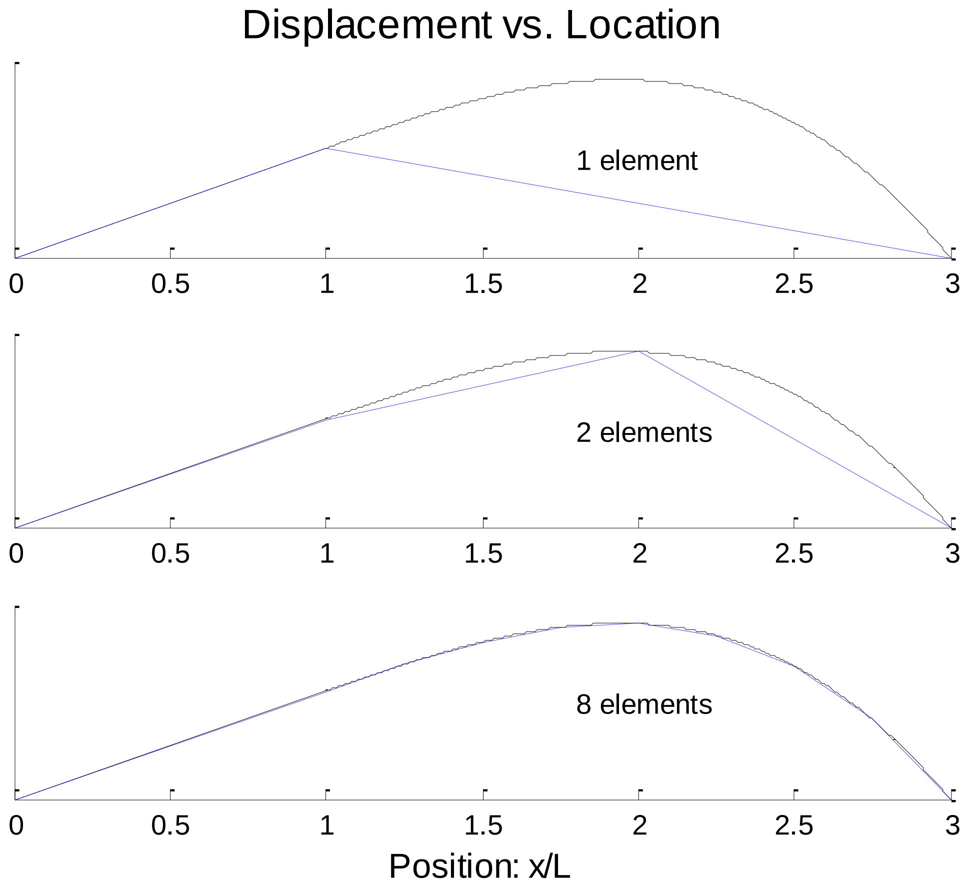
Den exakta lösningen var $u(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}\frac{QL}{EA}\frac{x}{L}, 0\le x\le L \\ \frac{1}{36}\frac{QL}{EA}\left[3-\frac{x}{L}+9\left(\frac{x}{L}\right)^2-3\left(\frac{x}{L}\right)^3\right], L<x\le 3L\end{cases}$

I noderna får vi med de två lösningarna:

Exakt $\Rightarrow \begin{bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\end{bmatrix}=\frac{2}{9}\frac{QL}{EA}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, FEM $\Rightarrow \begin{bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\end{bmatrix}=\frac{2}{9}\frac{QL}{EA}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

Mellan noderna beräknas förskjutningen per FEM-element som $u(x)=N_1(x)u_1+N_2(x)u_2$.

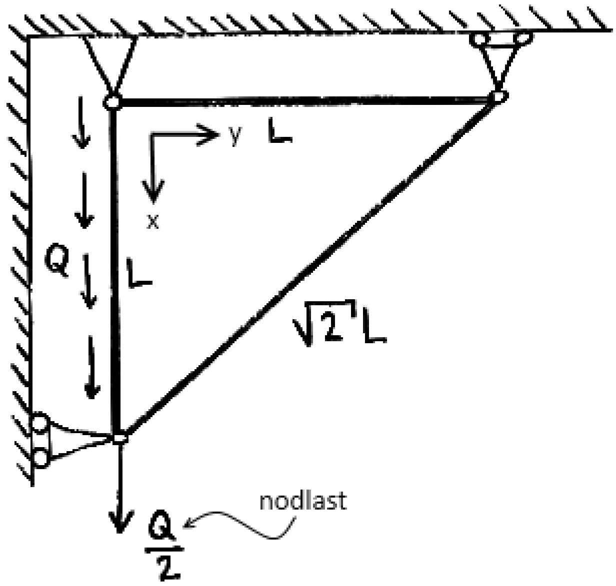
Notera att FEM ger exakt rätt lösning i noderna. Däremot ser vi att inom $L<x\le 3L$ ska förskjutningen egentligen beskrivas som en tredjegradare mellan noderna. Vi har tyvärr bara linjära element (formfunktionerna är linjära funktioner), som bara kan beskriva linjärt varierande förskjutning mellan noderna, se Figur 1. Så vill man ha bättre lösning med FEM måste man antingen använda fler element, eller mer avancerade element. VI hade i det här fallet t ex kunnat använda ett kubiskt element för att få den exakta lösningen.

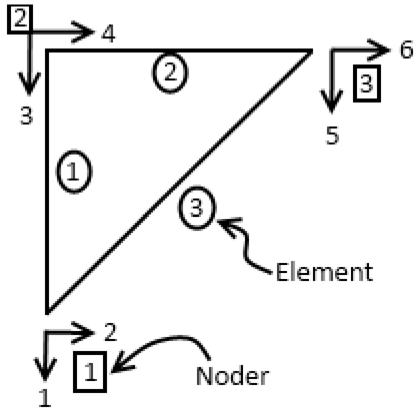


Figur 1 – Lösningen i det jobbiga området hade kunnat göras bättre med fler linjära element.

5.2 – Fackverk – Mycket Lik Uppgift 2.2 från Övning 1

Bilder ritade av Veronica Wåtz, paint-editerade och copy-pastade med prima kinesisk arbetskraft.





Notera hur koordinatsystemet ligger!

Givet: $E, A, Q \Rightarrow \mathbf{K}_\text{b} = K_x = \dfrac{Q}{AL}$

$$\text{Randvillkor: } \begin{cases} F_1 = Q/2 \Rightarrow D_1 = ? \\ D_2 = 0 \Rightarrow R_2 = ? \\ D_3 = 0 \Rightarrow R_3 = ? \\ D_4 = 0 \Rightarrow R_4 = ? \\ D_5 = 0 \Rightarrow R_5 = ? \\ F_6 = 0 \Rightarrow D_6 = ? \end{cases}$$

Sökt: Nodförskjutningar och reaktionskrafter.

Lösning: Vi har FEM-ekvationen, $\mathbf{KD} = \mathbf{F}$, vad saknas? $\mathbf{K}$ saknas $\rightarrow$ beräkna den $\rightarrow$ börja med $\mathbf{K}_\text{e}$.

Elementstyvhetsmatrisen finns beskriven i formelbladet, eller i exempelsamlingen sida 5.3:

Första elementet går mellan nod 1 och nod 2:

$$\left.\begin{aligned} &L_{e1} = L \\ &l_{12} = (x_2 - x_1)/L_{e1} = (0 - L)/L = -1 \\ &m_{12} = (y_2 - y_1)/L_{e1} = (0 - 0)/L = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12}m_{12} \\ l_{12}m_{12} & m_{12}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{e,1} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & -\mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Andra elementet går mellan nod 2 och nod 3:

$$\left.\begin{aligned} &L_{e2} = L \\ &l_{23} = (x_3 - x_2)/L_{e2} = (0-0)/L = 0 \\ &m_{23} = (y_3 - y_2)/L_{e2} = (L-0)/L = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} l_{23}^2 & l_{23}m_{23} \\ l_{23}m_{23} & m_{23}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{e,2} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 & -\mathbf{a}_2 \\ -\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tredje elementet går mellan nod 1 och nod 3:

$$\left.\begin{aligned} &L_{e3} = \sqrt{2}L \\ &l_{13} = (x_3 - x_1)/L_{e3} = (L-0)/L = 1/\sqrt{2} \\ &m_{13} = (y_3 - y_1)/L_{e3} = (0-L)/L = -1/\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} l_{13}^2 & l_{13}m_{13} \\ l_{13}m_{13} & m_{13}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{e,3} = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & -\mathbf{a}_3 \\ -\mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assemblera $\Rightarrow \mathbf{K} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & -1 & -2\sqrt{2} & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -2\sqrt{2} & -1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix}$ (1)

Vad mer saknar vi? Vi behöver $\mathbf{F}$!

*Några praktiska tumregler för utbredda laster på **linjära element**:*
Om K_x är en konstant fördelas lasten lika mellan noderna.
Om K_x är en triangel får noden på spetssidan 1/3 av lasten, och resterande 2/3 hamnar på noden vid den tunga änden.
Dessa två "elementarfall" kan kombineras.
Är man inte övertygad kan man alltid använda det vi härledde ovan och integrera fram det:

$$\mathbf{F}_{b,1} = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K}_b dV = \int_0^L \begin{bmatrix} x/L \\ 1-x/L \end{bmatrix} \frac{Q}{AL} A dx = \frac{Q}{L^2}\int_0^L \begin{bmatrix} x \\ L-x \end{bmatrix} dx = \frac{Q}{2}\frac{1}{L^2}\begin{bmatrix} x^2 \\ 2Lx - x^2 \end{bmatrix}_0^L = \frac{Q}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_b = \frac{Q}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} \frac{Q}{2} & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

Den totala lastvektorn blir alltså

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_\mathrm{b}+\mathbf{F}_\mathrm{s}=\begin{bmatrix} Q/2 \\ 0 \\ Q/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} Q/2 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q \\ R_2 \\ Q/2+R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Notera återigen att reaktionskrafterna bara är en DEL av totala lastvektorn!

Nu har vi det som behövs för att lösa FEM-ekvationen, $\mathbf{KD}=\mathbf{F} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & -1 & -2\sqrt{2} & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -2\sqrt{2} & -1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q \\ R_2 \\ Q/2+R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Reducera systemet genom att stryka raderna och kolumnerna där $D_i=0$.

$$\Rightarrow \mathbf{K}_\mathrm{red}\mathbf{D}_\mathrm{red}=\mathbf{F}_\mathrm{red} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} D_1 \\ D_6 \end{bmatrix}=2\sqrt{2}\frac{L}{EA}\mathbf{K}_\mathrm{red}^{-1}\begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} D_1 \\ D_6 \end{bmatrix}=2\sqrt{2}\frac{QL}{EA}\underbrace{\frac{1}{8+4\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_\mathrm{red}^{-1}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} D_1 \\ D_6 \end{bmatrix} \approx \frac{QL}{EA}\begin{bmatrix} 0.7929 \\ -0.2071 \end{bmatrix}}} \tag{6}$$

Sätt in de kända förskjutningarna och matrismultiplicera för att få lastvektorn. **Reaktionskrafterna kan lösas ut ur ekvation (4)**, dvs. $R_3=F_3-Q/2$.

$$\mathbf{F}=\mathbf{KD} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} \approx Q\begin{bmatrix} -0.207 \\ -1.293 \\ 0.207 \\ -0.207 \end{bmatrix}}}$$

Notera återigen att lastvektorn innehåller andra krafter än reaktionskrafter, som här t ex när vi har $F_3=Q/2+R_3$.
Matrismultiplikationen $\mathbf{KD}$ *ger INTE reaktionskrafterna direkt, utan bara lastvektorn, som är en summa av ALLA laster, bland andra reaktionskraften som man ofta är ute efter.*

*Jag vill uppmärksamma er på det här eftersom det brukar **förloras onödigt många tentapoäng** på just den här missen.*