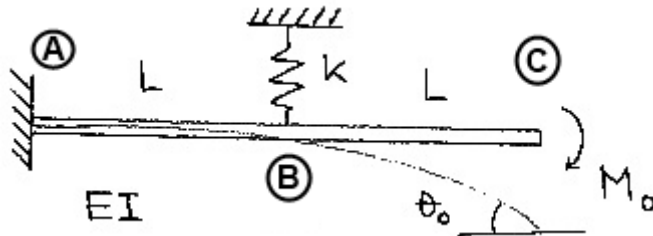


1.6 – Castiglianos 2:a Sats och Minsta Arbetets Princip

Bilder ritade av Veronica Wätz.



Givet: $k = \frac{6EI}{L^3}$ (1)

Sökt: θ_0

Lösning: Det står att θ_0 ska beräknas med hjälp av energimetod baserad på komplementär elastisk energi. Castiglianos 2:a sats, F.S. 5.19, s. 53 $\Rightarrow \theta_0 = \frac{\partial \bar{W}_{\text{tot}}}{\partial M_0}$

(2)

Den komplementära elastiska energin behövs, och för raka linjärelastiska balkar gäller att:

F.S. 6.52, s. 67 $\Rightarrow \bar{W}_{\text{balk}} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{N^2}{2EA} + \frac{M_b^2}{2EI} + \beta \frac{T^2}{2GA} + \frac{M_v^2}{2GK} + \frac{B^2}{2EK} \right] dx$ (3)

Obs! Notera att det här bara är komplementära energin i balken, glöm inte fjädern!

I det här fallet har vi bara böjmoment. (tvärkraftstermen är i regel försumbar för låga tunna balkar)

$\Rightarrow \bar{W}_{\text{balk}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_b^2}{2EI} dx$ (4)

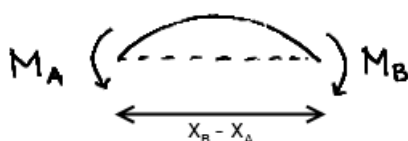
Snabb repetition från grundhållfen, finns i F.S. 6.3.

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dT(x)}{dx} = -q(x)$$

$q = 0 \Rightarrow T = \text{konstant} \Rightarrow M = \text{linjär}$. Obs! Lutningen knycker till vid punktkrafter såsom fjädern.

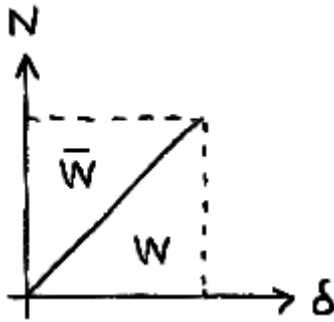
Inom områden där M varierar linjärt fås en enkel integral, som finns löst som F.S. 6.53, s. 67.

$\Rightarrow \bar{W}_{\text{balk}} = \underbrace{\frac{(x_B - x_A)}{6EI} [M_A^2 + M_A M_B + M_B^2]}_{\text{Område A-B}} + \underbrace{\frac{(x_C - x_B)}{6EI} [M_B^2 + M_B M_C + M_C^2]}_{\text{Område B-C}}$ (5)



Notera att L i F.S. står för längden på området, inte längden på balken.

Fjäderns komplementära energi måste också tas med i den totala komplementära energin.



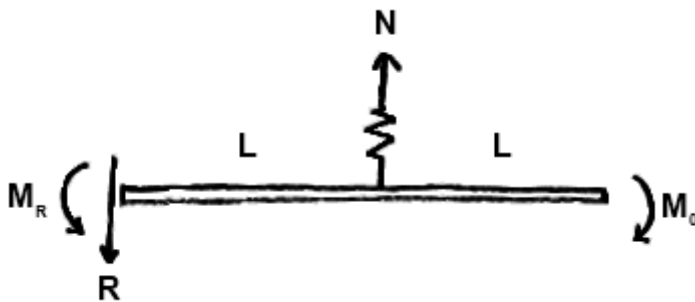
Notera att $\bar{W} = W$ om det är linjärelastiskt.

$$\bar{W}_{\text{fjäder}} = \frac{N\delta}{2} = \frac{N^2}{2k} = \frac{N^2 L^3}{12EI} \quad (6)$$

Nu ser uttrycket för totala komplementära energin ut såhär:

$$\bar{W}_{\text{tot}} = \bar{W}_{\text{balk A-B}} + \bar{W}_{\text{fjäder}} + \bar{W}_{\text{balk B-C}} = \frac{L}{6EI} [M_A^2 + M_A M_B + M_B^2] + \frac{N^2 L^3}{12EI} + \frac{L}{6EI} [M_B^2 + M_B M_C + M_C^2] \quad (7)$$

Dags för lite grundhållf! Frilägg och ställ upp ekvationer för global jämvikt:



$$\text{Kraftjämvikt} \Rightarrow R = N \quad (8)$$

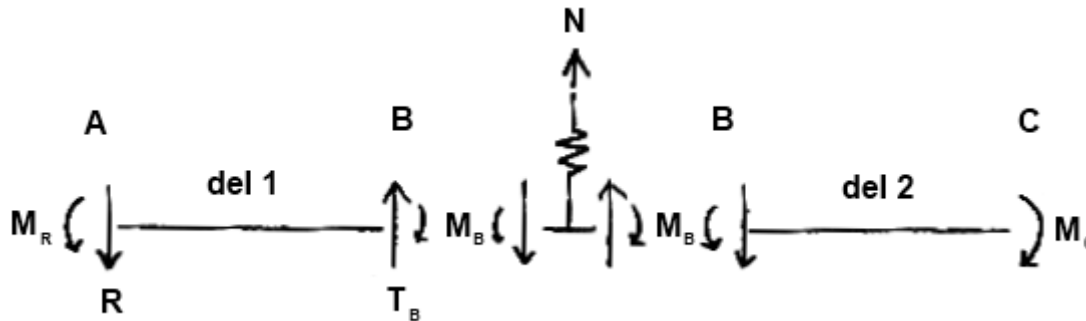
$$\text{Momentjämvikt} \Rightarrow M_R = M_0 - NL \quad (9)$$

(Samtidigt identifierar man att $M_A = M_R$, $M_C = M_0$.)

Global jämvikt gav bara 2 ekvationer, men vi har 3 obekanta (R, M_R, N), dvs. det är statiskt obestämt. Här kan minsta arbetets princip användas. Välj ut en av dessa storheter som den statiskt obestämda. Eftersom exempelsamlingen valt M_R i sin lösning tänkte jag välja N . Principen är

detsamma; lös ut ett uttryck för N ur $\frac{\partial \bar{W}_{\text{tot}}}{\partial N} = 0$, där \bar{W}_{tot} bara får innehålla N och kända storheter.

Eftersom momenten M_A och M_C redan är identifierade och uttryckta i bekanta storheter är det bara M_B kvar att uttrycka i något vi kan jobba vidare med. Det görs enklast genom att snitta upp och se vad den blir.



Från momentjämvikt i del 2 ser man att $M_B = M_0$ (10)

$$(7) \Rightarrow \frac{L}{6EI} \left[\underbrace{M_R^2 + M_R M_0 + M_0^2}_{\text{del 1}} + \underbrace{M_0^2 + M_0 M_0 + M_0^2}_{\text{del 2}} + \underbrace{\frac{N^2 L^2}{2}}_{\text{fjäder}} \right] = \frac{L}{6EI} \left[M_R^2 + M_R M_0 + 4M_0^2 + \frac{N^2 L^2}{2} \right] \quad (11)$$

Vi vet redan att $M_R = M_0 - NL$ från tidigare jämvikt, så sätt in det... *räkna räkna*...

$$\Rightarrow \bar{W}_{\text{tot}} = \frac{L}{6EI} \left[6M_0^2 - 3M_0 NL + \frac{3N^2 L^2}{2} \right] \quad (\text{bara } N \text{ och kända storheter kvar}) \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{W}_{\text{tot}}}{\partial N} = 0 \Leftrightarrow -3M_0 L + 3NL^2 = 0 \Leftrightarrow N = \frac{M_0}{L} \quad (13)$$

Nu har vi ett uttryck för N att sätta in i (12).

$$\bar{W}_{\text{tot}} = \frac{L}{6EI} \left[6M_0^2 - 3M_0 \frac{M_0}{L} L + \frac{3M_0^2 L^2}{2L^2} \right] = \frac{M_0^2 L}{6EI} \left[\frac{12 - 6 + 3}{2} \right] = \frac{3M_0^2 L}{4EI} \quad (14)$$

Äntligen! Ett uttryck för \bar{W}_{tot} som kan användas i Castiglianos 2:a sats.

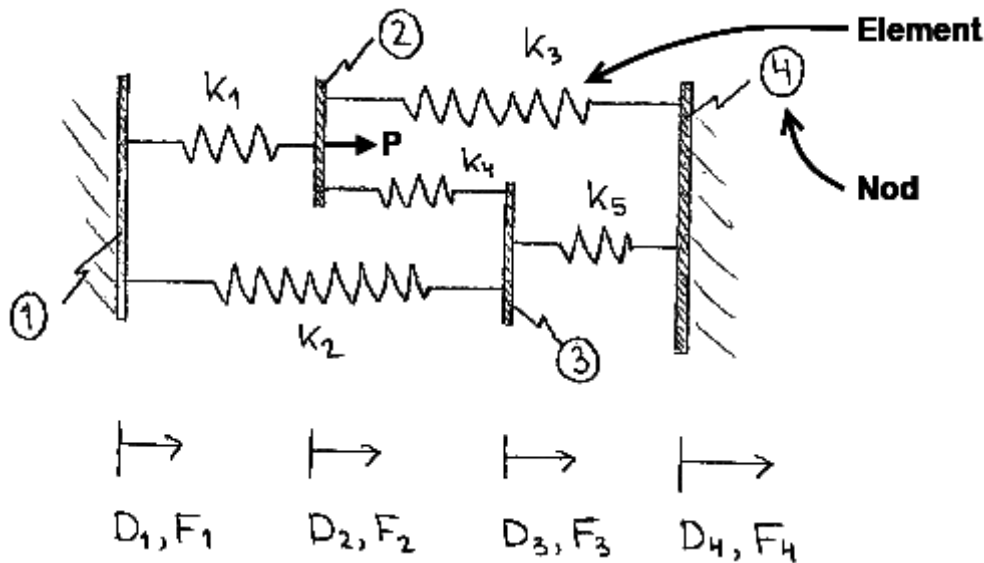
$$(2) \text{ och } (14) \Rightarrow \theta_0 = \frac{\partial \bar{W}_{\text{tot}}}{\partial M_0} = \frac{3M_0 L}{2EI}$$

Kom ihåg att kolla dimensionerna/enheterna!

$$\frac{[Nm][m]}{[N/m^2][m^4]} = \frac{Nm^2}{Nm^2} = 1 \Rightarrow \text{ok!}$$

2.1 – Fjäderelement med 1 DOF/Nod

Bilder ritade av Veronica Wätz.



Givet: "Materialdata": $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k$ (1)

$$\text{Randvillkor: } \begin{cases} D_1 = 0 \\ F_2 = P \\ F_3 = 0 \\ D_4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Notera att för varje nod, för varje frihetsgrad, är antingen förskjutningen eller kraften bestämd. Fria noder, t ex nr 3 i det här fallet, kan ses som noder med pålagd kraft, där kraften helt enkelt råkar vara 0.

På alla platser där förskjutningen är 0, finns det en okänd reaktionskraft.

Notera även att stänger och fjädrar är exakt samma sak, fast för stänger använder man "fjäderkonstanten" $k = EA/L$.

Sökt: Resterande okända förskjutningar och reaktionskrafter i systemet.

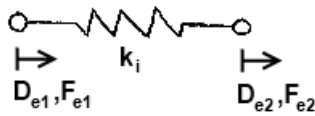
Lösning: Vi vill kunna använda $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{D}$. Systemet består av 4 noder, och eftersom varje nod bara kan förflytta sig i sidled har vi bara 1 frihetsgrad¹ per nod (problem i 1D). $4 \cdot 1 = 4$ skvallrar om hur långa de globala vektorerna blir, samt sidlängden på den kvadratiske styvhetsmatrisen.

$$\Rightarrow \begin{matrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} \end{matrix} \Rightarrow (2) \Rightarrow \begin{matrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ P \\ 0 \\ R_4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} \end{matrix} \quad (3)$$

Jämför med "fjäderkvationen" $F = k\delta$.

¹ Frihetsgrad = degree of freedom (DOF) på engelska.

Vi behöver uppenbarligen den globala styvhetsmatrisen, vilket börjar med att man tar fram styvhetsmatriser för varje enskilt element. Precis som för globala systemet har elementet sin egen ekvation, $\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{D}_e$. (4)



Elementstyvhetsmatrisen "beräknas" allmänt sett med den enkla formeln

$$\mathbf{K}_{e,i} = k_i \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

En förklaring till varför den ser ut såhär kan fås genom att skriva ut (4) lite mer i klartext:

$$\begin{cases} F_{e,1} = k_i (d_{e,1} - d_{e,2}) \\ F_{e,2} = k_i (-d_{e,1} + d_{e,2}) \end{cases}$$

Om d_1 ökar lite, dvs. nod 1 rör sig lite åt höger, kläms fjädern ihop. Kraften man måste lägga på nod 1 för att klämma ihop fjädern är förstås $k_i \cdot d_1$. Samma resonemang gäller för d_2 , men en rörelse åt höger i nod 2 betyder utdragning, därav motsatt tecken. Gör ett liknande tankeexperiment för kraften i nod 2 för andra raden i elementstyvhetsmatrisen.

Eftersom alla fjädrar i det här systemet har samma fjäderkonstant kommer elementstyvhetsmatrisen se likadana ut. Elementen innehåller dock olika noder, vilket kommer in vid assembleringen. Som exempel kan vi ta element 3, som innehåller de globala noderna 2 och 4.



Dela upp styvhetsmatrisen och sätt in dem på motsvarande plats i den globala styvhetsmatrisen. Det här är alltså element 3:s inverkan på hela systemets beteende.

$$\mathbf{K}_{e,3} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{4} \end{matrix} \Rightarrow k \begin{matrix} \textcircled{2} & \textcircled{4} \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right] & \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{4} \end{matrix} \end{matrix} \quad (6)$$

Global Styvhetsmatris

Hela globala styvhetsmatrisen fås om man summerar alla elementens inverkan, det är det här som kallas assemblering.

$$\mathbf{K} = k \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{e,1}} + k \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{e,2}} + k \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{e,3}} + \dots + k \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{e,5}} \quad (7)$$

Notera att elementets nummer inte påverkar något, det är bara nodernas numrering som avgör var värdena ska sättas in.

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 1+1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1+1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1+1+1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1+1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Med styvhetsmatrisen känd och insatt i (3) får vi:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ P \\ 0 \\ R_4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Kolla på alla rader där förskjutningarna inte är 0. Det ger lika många rader, dvs ekvationer, som okända förskjutningar. Om förskjutningen är okänd från randvillkoren, så är kraften känd (värt att nämnas igen). Det här ger ett ganska enkelt ekvationssystem.

$$\Rightarrow \begin{cases} P = k(-\cancel{0} + 3 \cdot D_2 - 1 \cdot D_3 - \cancel{0}) = k(3D_2 - D_3) \\ 0 = k(-\cancel{0} - 1 \cdot D_2 + 3 \cdot D_3 + -\cancel{0}) = k(-D_2 + 3D_3) \end{cases} \quad (10)$$

Notera att det här fungerar som om vi skulle stryka alla rader där kraften är okänd, och alla motsvarande kolonner. Här stryks raderna 1 och 4, och därmed även kolonnerna 1 och 4. Ekvationssystemet (3) kan reduceras så att man kan lösa ut alla okända frihetsgrader.

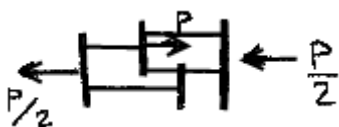
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_1 \\ P \\ 0 \\ R_4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \cancel{2} & -1 & -1 & \cancel{0} \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ \cancel{0} & -1 & -1 & \cancel{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{0} \\ D_2 \\ D_3 \\ \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} = k \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{\text{red}}} \underbrace{\begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_{\text{red}}} \Leftrightarrow \mathbf{D}_{\text{red}} = \mathbf{K}_{\text{red}}^{-1} \mathbf{F}_{\text{red}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{3 \cdot 3 - 1 \cdot 1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \frac{P}{8k} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}}} \quad (11)$$

Glöm inte att invertera k när förskjutningarna löses ut!

När frihetsgraderna är kända är det bara att utföra matrismultiplikationen med styvhetsmatrisen för att få ut krafterna.

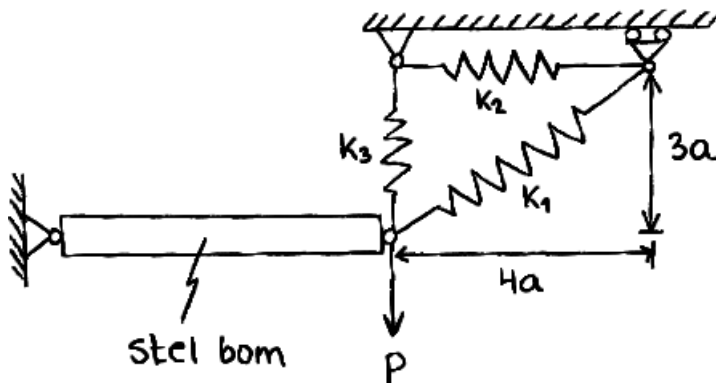
$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{D} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R_1 \\ P \\ 0 \\ R_4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{P}{8k} = P \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad (12)$$



Notera att global jämvikt är uppfyllt $\Leftrightarrow \sum F_i = 0$.

2.2 – Fjäderelement med 2 DOF/Nod

Bilder ritade av Veronica Wätz, "asse emeritus".



Givet: "Materialdata": $k_1 = 5k$, $k_2 = k$, $k_3 = 2k$ (1)

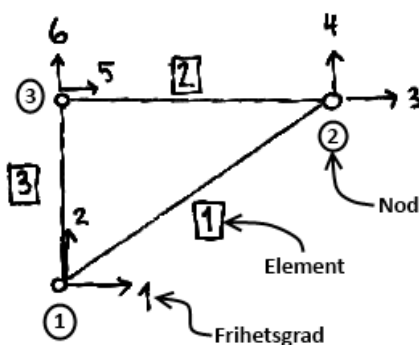
Randvillkor (se bilden under för nodnumrering):

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ F_2 = -P \\ F_3 = 0 \\ D_4 = 0 \\ D_5 = 0 \\ D_6 = 0 \end{cases}$$

Precis som i uppgift 2.1, och alla andra uppgifter, så är vet man alltid antingen förskjutning eller pålagd kraft för alla frihetsgrader.

Sökt: Förskjutningar och reaktionskrafter.

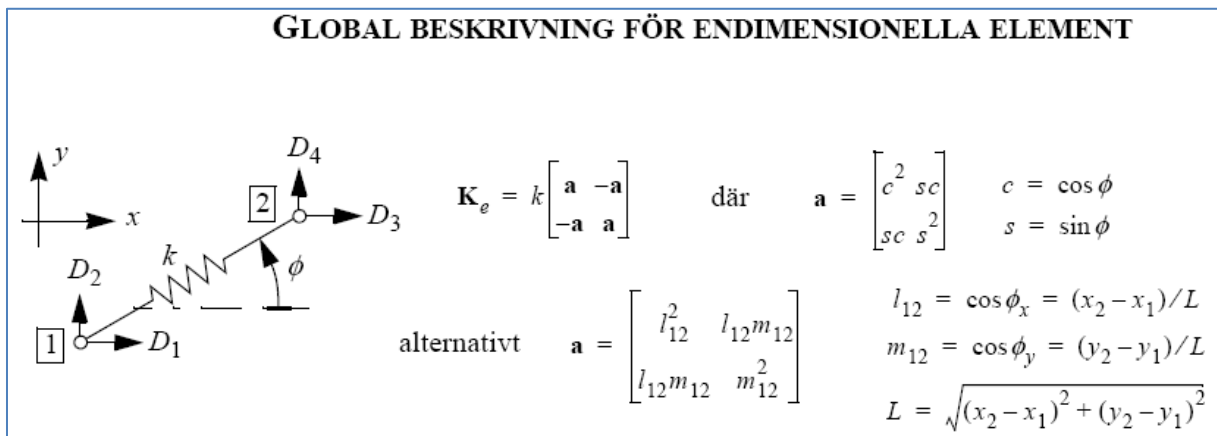
Lösning: En mycket bra start är att döpa systemets noder och frihetsgrader så att man kan referera till dem. Vi döper sakerna såhär:



FEM kommer att fungera oavsett hur man väljer att numrera, men smart numrering av noderna ger smalare diagonal i styvhetsmatrisen efter assemblering, vilket gör den snabbare att invertera.

För att bygga en tegelvägg behövs först tegelstenar, så vi börjar med elementstyvhetsmatriserna så att vi har något att bygga den globala matrisen med. Till skillnad från uppgift 2.1 kan noderna förflyttas i både x- och y-led nu. Det blir lite mer att göra, men det är inte svårare än att följa formlerna från formelbladet.

Från formelbladet:



Eftersom vi fått längder givna borde det undre alternativet enklast att använda.

För element 1:

$$L = \sqrt{16a^2 + 9a^2} = 5a$$

$$l = 4a/5a = 4/5 \tag{2}$$

$$m = 3a/5a = 3/5$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} l^2 & l \cdot m \\ l \cdot m & m^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{K}_{e,1} = 5k \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & -\mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \end{bmatrix} = \frac{k}{5} \begin{bmatrix} 16 & 12 & -16 & -12 \\ 12 & 9 & -12 & -9 \\ -16 & -12 & 16 & 12 \\ -12 & -9 & 12 & 9 \end{bmatrix} \tag{4}$$

På samma sätt:

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{e,2} = k \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 & -\mathbf{a}_2 \\ -\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{e,3} = 2k \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & -\mathbf{a}_3 \\ -\mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = 2k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Assemblering! Stycka upp styvhetsmatrisen som i uppgift 2.1. Eftersom det är flera frihetsgrader nu per nod så får varje nod en egen matris istället för bara ett litet element, principen är dock detsamma. Placera de fyra delarna på motsvarande noder som elementet innehåller. Element tre innehåller t ex noderna 1 och 3, och därför hamnar bitarna som här nere i matrisen till höger.

$$\mathbf{K} = 5k \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & -\mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & \mathbf{a}_2 & -\mathbf{a}_2 & & & \\ & & -\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} + 2k \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & & & & -\mathbf{a}_3 & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & -\mathbf{a}_3 & & & & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{K} = k \begin{bmatrix} \frac{16}{5} & \frac{12}{5} & -\frac{16}{5} & -\frac{12}{5} & 0 & 0 \\ \frac{12}{5} & \frac{9}{5}+2 & -\frac{12}{5} & -\frac{9}{5} & 0 & -2 \\ -\frac{16}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{16}{5}+1 & \frac{12}{5} & -1 & 0 \\ -\frac{12}{5} & -\frac{9}{5} & \frac{12}{5} & \frac{9}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{k}{5} \begin{bmatrix} 16 & 12 & -16 & -12 & 0 & 0 \\ 12 & 19 & -12 & -9 & 0 & -10 \\ -16 & -12 & 21 & 12 & -5 & 0 \\ -12 & -9 & 12 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Som vanligt i FEM tar vi fram den här: $\mathbf{F} = \mathbf{KD} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} R_1 \\ -P \\ 0 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \frac{k}{5} \begin{bmatrix} 16 & 12 & -16 & -12 & 0 & 0 \\ 12 & 19 & -12 & -9 & 0 & -10 \\ -16 & -12 & 21 & 12 & -5 & 0 \\ -12 & -9 & 12 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (7)$$

... så att vi kan reducera den till...

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -P \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{k}{5} \begin{bmatrix} 19 & -12 \\ -12 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -\frac{5P}{k} \cdot \frac{1}{19 \cdot 21 - 12 \cdot 12} \cdot \begin{bmatrix} 21 & 12 \\ 12 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \frac{-P}{17k} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Sätt in (8) i (7) och utför multiplikationen så ramlar reaktionskrafterna ut.

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ -P \\ 0 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \frac{k}{5} \begin{bmatrix} 16 & 12 & -16 & -12 & 0 & 0 \\ 12 & 19 & -12 & -9 & 0 & -10 \\ -16 & -12 & 21 & 12 & -5 & 0 \\ -12 & -9 & 12 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{-P}{17k} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R_1 \\ -P \\ 0 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} -4/17 \\ -1 \\ 0 \\ 3/17 \\ 4/17 \\ 14/17 \end{bmatrix}$$