KTH Teknikvetenskap

SF1664 Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder
Lösningsförslag till Tentamen 2 2013-01-10

(1) Förklara hur man kan använda derivata för att hitta en funktions största och minsta värden!

Lösning. Se Persson och Böiers bok, kapitel 4 □

Svar:

(2) Betrakta integralen $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx.$
A. Beräkna en approximation av integralen med hjälp av trapetsregeln och steglängden 1.
B. Beräkna integralen exakt, t ex med hjälp av variabelsubstitutionen $1+x^4=t$.

Lösning. A. Om $f(x)=x^3/(1+x^4)$ så ger trapetsregeln med steglängd 1 att integralen approximeras av

$$1\cdot\frac{f(1)+f(2)}{2}=\frac{1/2+8/17}{2}=\frac{33}{68}.$$

B. Vi använder substitutionen $t=1+x^4$, som ger $dt=4x^3dx$ och de nya gränserna 2 resp 17, och får

$$\int_1^2 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx=\frac{1}{4}\int_2^{17}\frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{4}(\ln 17-\ln 2)=\frac{1}{4}\ln\frac{17}{2}.$$

□

Svar: A. $33/68$

B. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln\frac{17}{2}.$

(3) Lös differentialekvationen $y''(x) + y(x) = x$ och hitta sedan den lösning som uppfyller initialvillkoren $y(0) = y'(0) = 0$.

Lösning. Vi vet att lösningens struktur är $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation och y_p är någon partikulärlösning.

Först söks y_h, allmänna lösningen till $y''+y = 0$. Karaktäristiska ekvationen $r^2+1 = 0$ har lösning $r = \pm i$, så $y_h(x) = C\cos x + D\sin x$, där C och D är godtyckliga konstanter.

Sedan söks y_p, dvs någon partikulärlösning. Eftersom högerledet är x, dvs ett förstagradspolynom, ansätter vi $y_p = Ax + B$. Då är $y_p' = A$ och $y_p'' = 0$. Vi får att y_p satisfierar differentialekvationen om och endast om $Ax + B = x$, vilket är uppfyllt om och endast om $A = 1$ och $B = 0$. Vår partikulärlösning är alltså $y_p(x) = x$.

Den allmänna lösningen till differentialekvationen i uppgiften är alltså

$$y(x) = C\cos x + D\sin x + x$$

där C och D är godtyckliga konstanter.

Nu ska vi bestämma konstanterna så att även begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 0$ är uppfyllda. Vi ser att $y(0) = C$ så $y(0) = 0$ är ekvivalent med att $C = 0$.

Om vi väljer $C = 0$ så får vi vidare att $y'(0) = 0$ om och endast om $D + 1 = 0$ vilket ger oss att $D = -1$.

Den funktion som uppfyller både differentialekvationen och initialvillkoren är alltså

$$y(x) = x - \sin x.$$

□

Svar:

$$y(x) = x - \sin x.$$

(4) Betrakta funktionen $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
A. Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring punkten origo alltså) av grad 2 till f.
B. Om $f(x)$ approximeras med Maclaurinpolynomet från uppgift A i intervallet $0 \leq x \leq 1/10$, är det då sant att absolutbeloppet av felet garanterat är mindre än 10^{-2}?

Lösning. A. Vi deriverar och får $f'(x) = (1-x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1-x)^{-3}$, $f'''(x) = 6(1-x)^{-4}$. Det betyder att $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$ och därför är det sökta Taylorpolynomet

$$p(x) = 1 + x + x^2.$$

B. Enligt Taylors formel är

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(c)}{3!} x^3 \right| = \frac{6}{3!(1-c)^4} x^3$$

för något tal c mellan 0 och x. Om x ligger i intervallet $0 \leq x \leq 1/10$ så gäller därför att

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{0.9^4} \cdot 0.1^3 \leq 2 \cdot 10^{-3} \leq 10^{-2}.$$

□

Svar: A. $p(x) = 1 + x + x^2$ B. JA

DEL B

(5) Beräkna nedanstående integraler.

A. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx.$

B. $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx.$

Lösning. A. Med substitutionen $u = \ln x$ med $du = dx/x$ (gränserna övergår i 0 resp $\ln 2$) får vi

$$\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int_0^{\ln 2} u^2\,du = [u^3/3]_0^{\ln 2} = (\ln 2)^3/3.$$

B. Vi använder partiell integration och får

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = -2.$$

□

Svar: A. $(\ln 2)^3/3$ B. -2.

(6) Vi vet från fysiken att två elektriska punktladdningar q_1 och q_2, belägna på avståndet r från varandra, påverkar varandra med kraften kq_1q_2/r^2 för någon konstant k. Antag nu att vi har en tunn homogen stav med längd L och laddningstäthet q (laddning per längdenhet) som påverkar en punktladdning Q belägen i stavens förlängning på avståndet R från stavens närmaste punkt. Beräkna den kraft med vilken staven påverkar punktladdningen.

(Tips: Dela in staven i små bitar och räkna på bidraget från varje bit.)

Lösning. Låt oss införa en x-axel så att stavens ena ände ligger vid origo och den andra änden vid L. Då har vi punktladdningen vid punkten $L + R$. Om vi delar in staven i små bitar kommer kraftfunktionen att vara ungefär konstant på varje sådan bit. En liten bit av staven av längd dx belägen vid punkten x påverkar då punktladdningen med en kraft som är ungefär

$$k\frac{Qqdx}{(L+R-x)^2}.$$

Hela kraften fås genom summation av bidragen från alla dessa bitar och summan är en Riemannsumma som vid obegränsat förfinad indelning går mot integralen (eftersom integranden är kontinuerlig)

$$\int_0^L k\frac{Qq}{(L+R-x)^2}\,dx = \left[\frac{kQq}{L+R-x}\right]_0^L = \frac{kQqL}{R(L+R)}.$$

□

Svar: $\dfrac{kQqL}{R(L+R)}$

(7) I en vattenreservoar innehållande 1000 kubikmeter vatten har 10 kg av ett giftigt ämne dumpats och lösts upp i vattnet. En naturlig rening börjar omedelbart genom att rent vatten tillförs reservoaren i en takt av 100 liter vatten per minut, samtidigt som en avrinning från reservoaren sker med 100 liter vätska per minut. Professor P föreslår följande matematiska modell för förloppet: Om $K(t)$ är mängden av det giftiga ämnet som finns i reservoaren vid tidpunkten t minuter efter utsläppet så gäller att

$$K'(t) = -\frac{K(t)}{1000}, \qquad K(0) = 10.$$

A. Lös professorns initialvärdesproblem, dvs finn den funktion K som uppfyller att $K'(t) = -K(t)/1000$ och att $K(0) = 10$.
B. Diskutera modellens rimlighet.

Lösning. A. Diffekvationen kan skrivas $K' + \dfrac{1}{1000}K = 0$. Karaktäristiska ekvationen $r + \dfrac{1}{1000} = 0$ har lösning $r = -1/1000$ så diffekvationens allmänna lösning är

$$K(t) = Ce^{-t/1000}.$$

Initialvillkoret $K(0) = 10$ ger att $C = 10$ så lösningen till professorns initialvärdesproblem är alltså

$$K(t) = 10e^{-t/1000}.$$

B. Det stora felet med modellen är att professorn inte har räknat ordentligt på hur mycket föroreningar som lämnar reservoaren per tidsenhet. Om $K(t)$ är mängden av det giftiga ämnet vid tidpunkten t så innehåller varje liter vätska $K(t)/10^6$ kg (eftersom 1 kubikmeter är detsamma som 1000 liter). Per tidsenhet är det alltså

$$100 \cdot \frac{K(t)}{10^6}$$

kg av ämnet som lämnar reservoaren så med andra ord får vi diffekvationen

$$K'(t) = -\frac{K(t)}{10^4}$$

där minustecknet är självklart eftersom vi har en minskning.

För att en modell likt denna ska vara rimlig krävs också att vätskan i reservoaren hela tiden hålls ordentligt blandad, så att det är samma koncentration av föroreningen överallt. Det kanske är en något idealiserad bild av verkligheten.

$\square$

Svar: A. $K(t) = 10e^{-t/1000}$. B. Se lösningen.

(8) Hur ska man välja det positiva heltalet n för att $n^{1/n}$ ska bli så stort som möjligt?

Lösning. A. Låt $f(x) = x^{1/x}$. Då kommer f att vara en deriverbar funktion för alla $x > 0$ och för alla positiva heltal n har vi att $f(n) = n^{1/n}$. Med hjälp av logaritmering kan vi skriva

$$f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}.$$

Vi deriverar och får

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Vi ser att $f'(x) = 0$ om och endast om $x = e$. Ett teckenstudium av derivatan ger:

Då $0 < x < e$ gäller att $f'(x) > 0$ vilket betyder att f är strängt växande här.

Då $x > e$ gäller att $f'(x) < 0$ vilket betyder att f är strängt avtagande här.

Vidare observerar vi att $f(1) = 1$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Det följer av ovanstående att f tar sitt största värde för $x = e$. Det följer också (då $3 > e$) att $3^{1/3} > n^{1/n}$ för alla heltal $n > 3$. Med andra ord: inget av de heltal n som är större än 3 kan maximera $n^{1/n}$. De enda heltal som kan komma ifråga är alltså 1, 2 och 3. Men vi kan direkt också avfärda 1 eftersom $f(1) < f(2)$ enligt teckenstudiet ovan (då $2 < e$).

Vi vet alltså nu säkert att $n^{1/n}$ (n heltal) maximeras av $n = 2$ eller $n = 3$. Med hjälp av ovanstående undersökningar och elementära omskrivningar har vi att

$$2^{1/2} = 2^{2/4} = 4^{1/4} = f(4) < f(3) = 3^{1/3}.$$

Vi drar slutsatsen att om n är ett positivt heltal så maximeras $n^{1/n}$ då $n = 3$.

$\square$

Svar: $n = 3$