KTH Teknikvetenskap

SF1664 Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder
Tentamen 2
Torsdagen den 10 januari 2013

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Lars Filipsson

Denna tentamen består av två delar, del A och del B, med vardera 4 uppgifter. Lösningarna på de uppgifter som hör till del A bedöms på skalan Godkänt/Underkänt. Lösningarna på de uppgifter som hör till del B poängsätts med maximalt 4 poäng vardera.

Godkänd läsförberedelse ger automatiskt godkänt på uppgift 1 och godkänd kontrollskrivning 3 ger automatiskt 4 poäng på uppgift 5 (som då inte behöver lösas).

För godkänt betyg på denna tentamen krävs Godkänt på samtliga uppgifter som ingår i del A samt minst 6 poäng totalt på del B.

För den som fått Godkänt på samtliga uppgifter på del A kommer betygsgränserna att ges av:

Betyg	A	B	C	D	E
Poäng på del B	14	12	10	8	6

På samtliga uppgifter gäller om inget annat sägs att lösningarna ska vara väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Var god vänd!

DEL A

(1) Förklara hur man kan använda derivata för att hitta en funktions största och minsta värden!

(2) Betrakta integralen $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx.$

A. Beräkna en approximation av integralen med hjälp av trapetsregeln och steglängden 1.

B. Beräkna integralen exakt, t ex med hjälp av variabelsubstitutionen $1+x^4=t$.

(3) Lös differentialekvationen $y''(x)+y(x)=x$ och hitta sedan den lösning som uppfyller initialvillkoren $y(0)=y'(0)=0$.

(4) Betrakta funktionen $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

A. Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring punkten origo alltså) av grad 2 till f.

B. Om $f(x)$ approximeras med Maclaurinpolynomet från uppgift A i intervallet $0 \le x \le 1/10$, är det då sant att absolutbeloppet av felet garanterat är mindre än 10^{-2}?

DEL B

(5) Beräkna nedanstående integraler.

A. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx.$

B. $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx.$

(6) Vi vet från fysiken att två elektriska punktladdningar q_1 och q_2, belägna på avståndet r från varandra, påverkar varandra med kraften kq_1q_2/r^2 för någon konstant k. Antag nu att vi har en tunn homogen stav med längd L och konstant laddningstäthet q (laddning per längdenhet) och en punktladdning Q belägen i stavens förlängning på avståndet R från stavens närmaste punkt. Beräkna den kraft med vilken staven påverkar punktladdningen. *(Tips: Dela in staven i små bitar och räkna på bidraget från varje bit.)*

(7) I en vattenreservoar innehållande 1000 kubikmeter vatten har 10 kg av ett giftigt ämne dumpats och lösts upp i vattnet. En naturlig rening börjar omedelbart genom att rent vatten tillförs reservoaren i en takt av 100 liter vatten per minut, samtidigt som en avrinning från reservoaren sker med 100 liter vätska per minut. Professor P föreslår följande matematiska modell för förloppet: Om $K(t)$ är mängden av det giftiga ämnet som finns i reservoaren vid tidpunkten t minuter efter utsläppet så gäller att

$$K'(t) = -\frac{K(t)}{1000}, \qquad K(0) = 10.$$

A. Lös professorns initialvärdesproblem, dvs finn den funktion K som uppfyller att $K'(t) = -K(t)/1000$ och att $K(0) = 10$.

B. Diskutera modellens rimlighet.

(8) Hur ska man välja det positiva heltalet n för att $n^{1/n}$ ska bli så stort som möjligt?