KTH Teknikvetenskap

SF1664 Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder
Lösningsförslag till Tentamen 1 2013-01-09

(1) Låt $f(x) = \sqrt{3x-1}$. Bestäm inversen till f. Bestäm också inversens definitionsmängd och värdemängd.

Lösning. För att hitta inversen sätter vi $y = f(x)$ och försöker lösa ut x. Vi observerar först att $y \geq 0$ är ett krav. För sådana y gäller:

y=$\sqrt{3x-1} \Longleftrightarrow y^2 = 3x - 1 \Longleftrightarrow \dfrac{y^2+1}{3} = x.$

Vi ser att inversen f^{-1} ges av $f^{-1}(y) = \dfrac{y^2+1}{3}$, för $y \geq 0$.

Vi har att $D_{f^{-1}} = V_f = [0, \infty)$ och $V_{f^{-1}} = D_f = [1/3, \infty)$.

$\square$

Svar: $f^{-1}(y) = \dfrac{y^2+1}{3}$, $y \geq 0$.

$D_{f^{-1}} = [0, \infty)$ och $V_{f^{-1}} = [1/3, \infty)$.

(2) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = x^3 - 3x + 1$ i den punkt på kurvan där x-koordinaten är 2.

Lösning. Vi deriverar och får $f'(x) = 3x^2 - 3$ och alltså $f'(2) = 9$. Vi observerar att i den punkt på kurvan där x-koordinaten är 2 så är y-koordinaten $f(2) = 3$. Tangentens ekvation får vi nu med hjälp av enpunktsformeln för linjens ekvation till

$$y - 3 = 9 \cdot (x - 2)$$

vilket är ekvivalent med

$$y = 9x - 15.$$

$\square$

Svar: $y = 9x - 15$

(3) Antar funktionen $f(x) = x^2e^{-x}$ något största eller minsta värde när x varierar i intervallet $-4 \leq x \leq 4$? Bestäm i så fall dessa.

Lösning. Funktionen är kontinuerlig och intervallet slutet och begränsat vilket gör att funktionen måste anta både ett största och ett minsta värde. Dessa kan antas i kritiska punkter, ändpunkter på intervallet eller i punkter där derivata saknas. Vi deriverar och får $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$, som existerar för alla aktuella x. Derivata saknas alltså ingenstans. Vi ser att $f'(x) = 0$ om och endast om $x = 0$ eller $x = 2$. Ändpunkterna på intervallet är ± 4. Största och minsta värde, som säkert finns, måste alltså vara med bland dessa funktionsvärden:

$$f(-4) = 16e^4, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = 4e^{-2}, \quad f(4) = 16e^{-4}.$$

En jämförelse mellan dessa värden ger nu att det största värdet är $f(-4) = 16e^4$ och det minsta värdet är $f(0) = 0$.

$\square$

Svar: största värdet är $16e^4$ och det minsta värdet är 0.

(4) Beräkna dessa integraler. A. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$. B. $\displaystyle\int_1^3 x\ln x\,dx$.

Lösning. A. Vi använder substitutionen $t = 1 + \sin x$ och får

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln 2.$$

B. Vi använder partiell integration och får

$$\int_1^3 x\ln x\,dx = [(x^2/2)\ln x]_1^3 - \int_1^3 \frac{x}{2}\,dx = \frac{9}{2}\ln 3 - [x^2/4]_1^3 = \frac{9}{2}\ln 3 - 2.$$

□

Svar: A. $\ln 2$. B. $\frac{9}{2}\ln 3 - 2$.

DEL B

(5) Med Newton-Raphsons metod för att approximativt lösa ekvationen $f(x) = 0$ ska man börja med ett startvärde x_0 och får sedan successiva approximationer till lösningen genom formeln

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Förklara varför formlen ser ut som den gör!

Lösning. Se Persson och Böiers lärobok sid 245.

□

Svar:

(6) Låt $f(x) = x \ln |x|$.
A. Bestäm definitionsmängden till f.
B. Beräkna $\lim_{x\to 0} f(x)$ och $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.
C. Bestäm alla lokala extrempunkter till f.
D. Skissa kurvan $y = f(x)$.
E. Bestäm värdemängden till f.

Lösning. A. Definitionsmängden består av alla x för vilka $x \ln |x|$ är definierat, dvs alla $x \neq 0$.

B. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (standardgränsvärde), $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (uppenbart eftersom båda faktorerna går mot ∞), $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (uppenbart eftersom första faktorn går mot $-\infty$ och andra faktorn mot ∞).

C. Vi deriverar och får $f'(x) = \ln |x| + 1$ som existerar för alla $x \neq 0$. Vi ser att $f'(x) = 0$ om och endast om $\ln |x| = -1$ dvs om och endast om $|x| = 1/e$ dvs om och endast om $x = \pm 1/e$. Ett teckenschema för derivatan ger:

Om $x < -1/e$ så är $f'(x) > 0$ så det följer att f är strängt växande här.

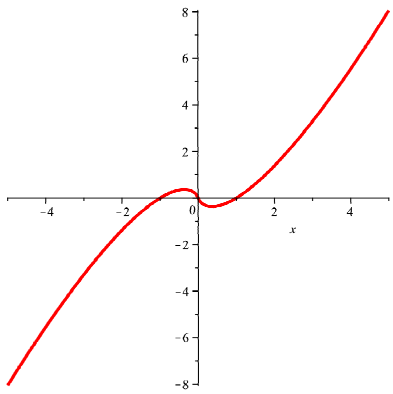
Om $-1/e < x < 0$ så är $f'(x) < 0$ så det följer att f är strängt avtagande här.

Om $0 < x < 1/e$ så är $f'(x) < 0$ så det följer att f är strängt avtagande här.

Om $x > 1/e$ så är $f'(x) > 0$ så det följer att f är strängt växande här.

Av ovanstående följer att f har exakt två lokala extrempunkter, ett lokalt max i $-1/e$ och ett lokalt min i $1/e$.

D. Kurvan kan nu skissas:



E. Eftersom $f(1/e) = -1/e$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ och f är kontinuerlig på intervallet $x \geq 1/e$ så antar f alla tal större än $-1/e$ som värden. Eftersom $f(-1/e) = 1/e$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ och f är kontinuerlig på intervallet $x \leq -1/e$ så antar f alla tal mindre än $1/e$ som värden. Därför är värdemängden till f alla reella tal, dvs $\mathbb{R}$.

$\square$

(7) Låt $f(x) = x^2 - \cos x$. Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = 0$ på intervallet $0 \leq x \leq 10$?

Lösning. Vi observerar först att $f(0) = -1$ (som är mindre än noll) och $f(10) = 100 - \cos 10$ (som är större än noll). Eftersom f är kontinuerlig på intervallet $[0, 10]$ följer av satsen om mellanliggande värden att det finns minst ett x mellan 0 och 10 sådant att $f(x) = 0$. Minst en lösning alltså!

För att undersöka om det finns fler lösningar gör vi ett derivatastudium. Vi deriverar och får $f'(x) = 2x + \sin x$ som existerar för alla aktuella x. Kan derivatan bli negativ? Vi deriverar en gång till och får $f''(x) = 2 + \cos x$ som uppenbart är större än eller lika med 1 för alla x. Eftersom andraderivatan är positiv så följer att derivatan är strängt växande, och eftersom $f'(0) = 0$ så månste $f'(x) > 0$ i hela intervallet $0 < x < 10$. Av detta följer att f är strängt växande i intervallet $0 \leq x \leq 10$ och därför kan ekvationen $f(x) = 0$ inte ha mer än en lösning.

Ekvationen $f(x) = 0$ har exakt en lösning i intervallet $0 \leq x \leq 10$. $\square$

Svar: Ekvationen $f(x) = 0$ har exakt en lösning i intervallet $0 \leq x \leq 10$.

(8) Vilket är störst, 3^π eller π^3 ?

Lösning. Sätt $f(x) = \dfrac{3^x}{x^3}$. Då är $f(3) = 1$ och vi kan svara på frågan i uppgiften genom att ta reda på om $f(\pi) = 3^\pi/\pi^3$ är större eller mindre än 1. Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{x^3 e^{x\ln 3} \cdot \ln 3 - 3x^2 e^{x\ln 3}}{x^6} = \frac{x^2 e^{x\ln 3}(x\ln 3 - 3)}{x^6}$$

(där vi har använt omskrivningen $3^x = e^{x\ln 3}$). Eftersom $\ln 3 > 1$ så gäller att $f'(x) > 0$ för $x \geq 3$. Det följer att f är strängt växande då $x \geq 3$. Speciellt är då

$$\frac{3^\pi}{\pi^3} = f(\pi) > f(3) = 1.$$

Alltså är 3^π större än π^3. $\square$

Svar: 3^π är större än π^3.