Reglerteknik AK Tentamen 2013–01–10
Lösningsförslag

Uppgift 1a

Svar:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

Uppgift 1b

Styrbarhetsmatrisen ges av

$$[B\ AB] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

med determinant lika med $-1 \neq 0$, dvs systemet är styrbart. Detta kan också inses från Uppgift a), då överföringsfunktionen är av samma ordning som antal tillstånd.

Uppgift 1c

Slutna systemet ges av

$$G_c(s) = \frac{\frac{K(1+s)}{s(s-1)}}{1 + \frac{K(1+s)}{s(s-1)}} = \frac{K(1+s)}{s(s-1) + K(1+s)} = \frac{K(1+s)}{s^2 + (K-1)s + K}$$

För stabilitet krävs: $K - 1 > 0$ och $K > 0$.
Svar: Stabilt för $K > 1$

Uppgift 1d

Svar:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}u(\tau)d\tau = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}e^{a\tau}d\tau \\ &= e^{at}x(0) + e^{at}t = e^{at}[x(0) + t] \end{aligned}$$

Uppgift 1e

Derivera PI relationen mellan u och e

$$\dot{u}(t) = K[\dot{e}(t) + \frac{1}{T_I}e(t)].$$

Approximera tidsderivator med Tustins formel.

$$\frac{2}{T}\frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}}u(t) = K\frac{2}{T}\frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}}e(t) + \frac{K}{T_I}e(t),$$

Applicera $1+q_T^{-1}$ på höger och vänster sida och lös ut $u(t)$

$$u(t) = u(t-T) + (K + \frac{KT}{2T_I})e(t) + (\frac{KT}{2T_I} - K)e(t-T).$$

Jämför med $u(t) = u(t-0.2) + 10.1e(t) - 9.9e(t-0.2)$ med $T = 0.2$ ger

$$K + \frac{K}{10T_I} = 10.1 \quad \frac{K}{10T_I} - K = -9.9 \quad \Rightarrow \quad K = 10, T_I = 10$$

Svar: $u(t) = 10[e(t) + 0.1\int_0^t e(\tau)d\tau]$

Uppgift 2a

Runt $\theta = 0$ gäller

$$\cos[\theta(t)] \approx 1, \quad \sin[\theta(t)] \approx \theta(t)$$

vilket ger den linjära approximationen

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}l - g\theta(t) = u(t)$$

med överföringsfunktion

Svar:

$$G(s) = \frac{1}{ls^2 - g}$$

Uppgift 2b

Med $F(s) = K_p + K_d s$ fås det återkopplade systemet

$$G_c(s) = \frac{K_p + K_d s}{ls^2 - g + K_p + K_d s} = \frac{K_p + K_d s}{s^2 - 10 + K_p + K_d s}$$

Jämförelse med $(s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$ ger $K_d = 2$ och $K_p = 11$
Svar: $F(s) = 11 + 2s$

Uppgift 2b

Polerna ges nu av rötterna till $ls^2 + 2s + 1$ dvs

$$s = \frac{-1}{l} \pm \sqrt{\frac{1}{l^2} - 1}$$

Rotorten ritas lättast om man inför $K = 1/l$, dvs $s^2 + K(2s+1)$, dvs $P(s) = s^2$ och $Q(s) = 2s + 1$.

(i). Startpunkter, $K = 0$,

$$s^2 = 0 \Rightarrow s \in \{0, 0\}$$

Slutpunkter, $K \to \infty$

$$2s + 1 = 0 \Rightarrow s \in \{-1/2\}$$

(ii). En asymptot med riktning π

(iii). Reeela axeln: $[-\infty, -1/2]$

(iv). Skärning med imaginary axeln enbart för $K = 0$ eftersom $s^2 + K(2s+1)$ har rötter i vänstra halvplanet för $K > 0$.

Observera att när vi nu skall rita rotort map på $l = 1/K > 0$ så byts bara riktningen på rorten dvs slutpunkter blir startpunkter etc.
Svar: Det återkopplade systemet är stablit för $l > 0$

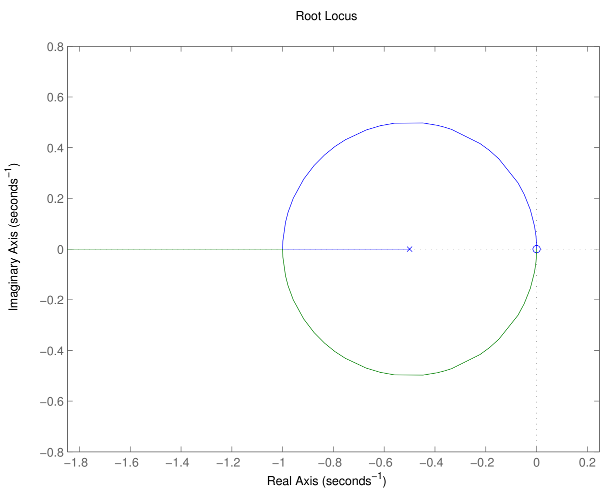

Figure 1: Rotort

Uppgift 3

En proportionell regulator ändrar enbart amplitudkurvan. Skärfrekvensen bestäms där $0.25G(i\omega_c) = 1$, vilket ger skärfrekvensen $\omega_c = 0.2$ rad/s. Fasmarginalen är där $\phi_m = 51°$. Specifikationen på det nya systemet är att vi vill vara 5 gånger snabbare, vilket ger ny skärfrekvens $\omega_{c,d} = 5\omega_c = 1.25$ rad/s. För att behålla samma översläng så vill vi behålla fasmarginalen $\phi_m = 51°$. Slutligen har vi ett villkor på det stationära felet, som uppfylls med hjälp av lag-delen.

Vid frekvensen 1.25 rad/s är fasmarginalen $-13°$, så den behöver höjas $13° + 51° + 2 \times 6° = 76°$, där de sista $2 \times 6°$ kommer från lag-termen som vi ser senare. Då fashöjningen är över 60° så introducerar vi två stycken lead-länkar som vardera höjer fasen med 38°. Från tabellen får vi ut $\beta = 0.24$, och tumregeln ger $\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = 1.64$.

Med två lead-länkar på formen $K\left(\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}\right)^2$ bestäms förstärkningen som $K = \frac{\beta}{|G(i\omega_{c,d}|} = 0.66$.

Slutligen vill vi titta på det stationära felet för en enhetsramp, som ska vara mindre än 0.05. Vi har inget villkor på lågfrekvensförstärkningen, och vet att en ren integrator tar bort det statiska felet för ett steg, och att en dubbelintegrator tar bort det statiska felet för en ramp. Notera att systemet inte innehåller någon integrator då statiska förstärkning är ändlig, $G(0) \approx 880$, så därför behöver vi dubbelintegratorn. Vi väljer därför dubbla lag-termer, där $\gamma = 0$ och $\tau_I = 10/\omega_{c,d} = 8$ väljs enligt tumregeln. Notera att varje lag-länk försämrar fasen med 6 grader, och därför valde vi att höja fasen 12 grader extra när vi designade lead-delen.

Svar: Den kompletta regulatorn är

$$F_{lead-lag}(s) = K\left(\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}\right)^2 \left(\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}\right)^2$$

med $K = 0.66$, $\beta = 0.24$, $\tau_D = 1.64$, $\gamma = 0$ och $\tau_I = 8$.

Uppgift 4a

Med

$$C = C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

blir observerbarhetsmatrisen blir

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och det icke-observerbar underrummet (nollrummet till $\mathcal{O}$ spänns upp av vektorerna

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs vi får ingen information om vinkel och vinkelhastighet för delsystem två.

Uppgift 4b

Med

$$C = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

blir observerbarhetsmatrisen blir

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

och det icke-observerbar underrummet (nollrummet till $\mathcal{O}$ spänns upp av vektorerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dvs vi får ingen information om vinkel och vinkelhastighet för delsystem ett.

Uppgift 4c

Genom att mäta båda vinklarna blir alla tillstånd obseverbara och observatörsfelsdynamiken för det föreslagna observatören ges av egenvärdena till matrisen

$$A - K_1C_1 - K_2C_2 = \begin{bmatrix} -k_{11} & 1 & 0 & 0 \\ -k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{23} & 1 \\ 0 & 0 & 1 - k_{24} & 0 \end{bmatrix}$$

Genom att använda blockstrukturen fås

$$\det(sI - (A - K_1C_1 - K_2C_2)) = (s^2 + k_{11}s + k_{12})(s^2 + k_{23}s + k_{23} - 1)$$

och vi ser att rötterna till denna fjärdegradsekvation kan placeras godtyckligt eftersom vi kan fritt kan bestämma polynomens koefficienter.

Uppgift 5a

Notera att primitiv funktion till den naturliga logaritmen är $\log(x)$ är $x\log(x) - x$ (derivera!) Med approximationen

$$|S(i\omega)| = \begin{cases} M_s \frac{\omega}{\omega_1}, & 0 \le \omega \le \omega_1 \\ M_s, & \omega_1 \le \omega \le \omega_2 \\ 1, & \omega_2 < \omega \end{cases}$$

fås

$$\int_0^\infty \log|S(i\omega)|d\omega = \int_0^{\omega_1} \log(M_s \frac{\omega}{\omega_1})d\omega + (\omega_2 - \omega_1)\log(M_s) + 0$$

Nu är

$$\int_0^{\omega_1} \log(M_s \frac{\omega}{\omega_1})d\omega = \omega_1[\log(M_s) - \log(\omega_1)] + \omega_1 \log(\omega_1) - \omega_1 = \omega_1[\log(M_s) - 1]$$

dvs

$$\int_0^\infty \log|S(i\omega)|d\omega = \omega_1[\log(M_s) - 1] + (\omega_2 - \omega_1)\log(M_s) = \omega_2 \log(M_s) - \omega_1 = p\pi$$

där sista likheten är Bodes relation Detta medför att

$$\log(M_s) = \frac{p\pi + \omega_1}{\omega_2} \quad \Rightarrow \quad M_s = e^{(\pi p + \omega_1)/\omega_2}$$

vilket skulle bevisas.

Uppgift 5b

Störningar i frekvensområdet mellan ω_1 och ω_2 förstärks med $|S(i\omega)| = M_s$ vilket för $p = 6$, $\omega_1 = 3$ rad/s och $\omega_2 = 40$ rad/s ger 1.7 **Svar:** De förstärks med en faktor 1.7