

## Del A

1. a) Värdena  $\lambda = -2$ ,  $\lambda = 1$  och  $\lambda = 3$  ska vara egenvärden till  $A$  och ska därför uppfylla den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Detta ger oss de tre determinantvillkoren

$$\det(A + 2E) = 0, \quad \det(A - E) = 0 \quad \text{och} \quad \det(A - 3E) = 0.$$

b) 

```

for a11=-2:2,
  for a12=-2:2,
    for a13=-2:2,
      for a21=-2:2,
        for a22=-2:2,
          for a23=-2:2,
            for a31=-2:2,
              for a32=-2:2,
                for a33=-2:2,
                  A = [a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33];
                  if (det(A+2*eye(3)) == 0) && ...
                      (det(A-eye(3)) == 0) && ...
                      (det(A-3*eye(3)) == 0)
                      disp(A)
                end
              end
            end
          end
        end
      end
    end
  end
end

```

2. Förslag:

- Ekvationssystemet  $Ax = 0$  har en parameterlösning eftersom  $\det A = 0$ .
- Att vektorerna  $\{u_1, u_2, u_3\}$  är en bas för  $\mathbf{R}^3$  betyder att de är linjärt oberoende.
- Om tre vektorer i  $\mathbf{R}^3$  är linjärt beroende så är de parallella med ett och samma plan.
- En matris  $A$  är diagonaliserbar då  $A$ :s egenvektorer är linjärt oberoende och lika många som antalet kolumner i  $A$ .

3. Vi har att

$$Au_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -9 & 3 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = 7u_1,$$

$$Au_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -9 & 3 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0u_2,$$

$$Au_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -9 & 3 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -21 \\ -7 \end{pmatrix} = -7u_3,$$

och kan avläsa att  $u_1$ ,  $u_2$  och  $u_3$  är egenvektorer som svarar mot egenvärdena  $\lambda_1 = 7$ ,  $\lambda_2 = 0$  respektive  $\lambda_3 = -7$ .

En diagonalisering av  $A$  är därför

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

4. a) Alla punkter på  $z$ -axeln har koordinater på formen  $(0,0,t)$  för något  $t$ . Stoppar vi in dessa koordinater i konens ekvation får vi

$$4x^2 + y^2 - yz - y = 4 \cdot 0^2 + 0^2 - 0 \cdot t - 0 = 0,$$

dvs. konens ekvation är uppfylld vilket visar att punkterna på  $z$ -axeln ligger på konen.

- b) Konen skär planet längs en kurva som har ekvationen

$$4x^2 + 1^2 - 1 \cdot z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 4x^2,$$

dvs. en parabel. Vi får två punkter på parabeln genom att t.ex. sätta  $x = 0$  och  $x = 1$  i parabelns ekvation och får då  $z = 0$  respektive  $z = 4$ . Två punkter på parabeln är alltså  $(0,1,0)$  och  $(1,1,4)$ .

- c) Konen skär planet  $z = 1$  längs en kurva som har ekvationen

$$4x^2 + y^2 - y \cdot z - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

Vi kvadratkompletterar  $y$  och får ekvationen för en ellips,

$$4x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} + (y-1)^2 = 1.$$

Nu kan vi avläsa att huvudaxlarna är  $x$ - och  $y$ -axlarna och storaxelns längd är  $2 \cdot 1 = 2$  (i  $y$ -riktningen) och lillaxelns längd är  $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$  (i  $x$ -riktningen).

## Del B

5. a) Vektorerna är linjärt oberoende om vektorekvationen

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \mathbf{0}$$

endast har lösningen  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ .

Skriver vi vektorerna i kolumnform blir ekvationen

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och vänsterledet kan skrivas i matrisform

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi löser detta linjära ekvationssystem med gausseliminering,

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{②} \\ \text{①} \\ \text{③} \end{array} \sim \\
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{③} \\ \text{⑦} \\ \text{⑤} \end{array} \sim \\
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{①} \\ \text{①/2} \\ \text{①/7} \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{①} \\ \text{①} \\ \text{①} \\ \text{①} \end{array} \sim \\
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Från slutschemat avläser vi att systemet endast har lösningen  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ , vilket betyder att vektorerna  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  och  $\mathbf{u}_3$  är linjärt oberoende.

- b) Vektorn  $\mathbf{v}$  har koordinaterna  $(1, 1, 3, -2)$  i basen  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$  om

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{u}_1 + 1 \cdot \mathbf{u}_2 + 3 \cdot \mathbf{u}_3 - 2 \cdot \mathbf{u}_4$$

dvs. om

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_4 &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3 - \mathbf{v}) \\
 &= (1, 2, 5, 1).
 \end{aligned}$$

Samlingen  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$  är en bas för  $\mathbf{R}^4$  om vektorerna  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_3$  och  $\mathbf{u}_4$  är linjärt oberoende. För att visa detta visar vi att vektorekvationen

$$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$$

endast har lösningen  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ .

Vektorekvationen skriver vi i kolumnform

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eller i matrisform

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta system löser vi med gausseliminering,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & | & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 9 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 9 & | & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 16 & | & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -8 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & | & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} & | & \frac{8}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{21} & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Vi avläser att systemet endast har lösningen  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ . Vektorerna  $u_1, u_2, u_3$  och  $u_4$  är alltså linjärt oberoende och  $B$  är därmed en bas för  $\mathbf{R}^4$ .

6. a) Vi får en vektor parallell med respektive linje genom att välja två punkter  $P$  och  $Q$  på linjen och bilda vektorn  $\vec{PQ}$ .

- På linjen  $x - y = 0$  väljs t.ex.  $P = (0,0)$  och  $Q = (1,1)$  och då får vi den första basvektorn till  $u = \vec{PQ} = (1,1)$ .
- På linjen  $x + 2y = 0$  väljs t.ex.  $P = (0,0)$  och  $Q = (-2,1)$  och då får vi den andra basvektorn till  $v = \vec{PQ} = (-2,1)$ .

Vektorerna  $u$  och  $v$  är en bas för  $\mathbf{R}^2$  eftersom de inte är parallella (ej skalär multipel av varandra) och därmed linjärt oberoende.

b) I basen  $B = \{u, v\}$  betecknar vi koordinaterna med  $(x', y')$  och basbytesformeln ger då att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{E \leftarrow B} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (P_{B \leftarrow E})^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Alltså,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' \\ y = -\frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y' \end{cases}$$

I de nya koordinaterna blir vänsterledet i hyperbelns ekvation,

$$\begin{aligned} x^2 - xy - 2y^2 &= \left(\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y'\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y'\right)\left(-\frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y'\right) - 2\left(-\frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y'\right)^2 \\ &= \frac{1}{9}(x')^2 + \frac{4}{9}x'y' + \frac{4}{9}(y')^2 + \frac{1}{9}(x')^2 + \frac{1}{9}x'y' - \frac{2}{9}(y')^2 - \frac{2}{9}(x')^2 + \frac{4}{9}x'y' - \frac{2}{9}(y')^2 \\ &= x'y'. \end{aligned}$$

Hyperbelns ekvation i de nya koordinaterna är alltså

$$x'y' = 2.$$

7. Vektorn  $\mathbf{u}$  ska avbildas på vektorn  $\mathbf{v}$  som i sin tur ska avbildas tillbaka på  $\mathbf{u}$ . Detta betyder att  $\mathbf{u}$  avbildas på sig själv med  $A^2$ , men samtidigt ska  $\mathbf{u}$  inte avbildas på sig själv med  $A$  (eftersom  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ ). Vi kan sammanfatta detta som att

1.  $\mathbf{u}$  är en egenvektor till  $A^2$  med egenvärdet 1,
2.  $\mathbf{u}$  är inte en egenvektor till  $A$  med egenvärdet 1, och
3.  $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$ .

Egenvärden och motsvarande egenvektorer till  $A$  är

Egenvärde	Egenvektor
$\lambda = -1$	$(23, -15, 17)$
$\lambda = 0$	$(6, -5, 5)$
$\lambda = 1$	$(1, -1, 1)$

och detta medför att matrisen  $A^2$  har följande egenvärden och motsvarande (linjärt oberoende) egenvektorer:

Egenvärde	Egenvektor
$\lambda = 1$	$(23, -15, 17)$
$\lambda = 0$	$(6, -5, 5)$
$\lambda = 1$	$(1, -1, 1)$

Vektorn  $\mathbf{u}$  ska alltså tillhöra delrummet  $\text{span}\{(23, -15, 17), (1, -1, 1)\}$  men inte del-delrummet  $\text{span}\{(1, -1, 1)\}$ . Ett exempel är  $\mathbf{u} = (23, -15, 17)$  och då är  $\mathbf{v} = (-23, 15, -17)$ .

8. a) Egenvärden och motsvarande egenvektorer till  $A$  är

Egenvärde	Egenvektor
$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$	$\mathbf{u}_1 = (2, 1 - \sqrt{5})$
$\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$	$\mathbf{u}_2 = (2, 1 + \sqrt{5})$

En diagonalisering av  $A$  är därför

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 - \sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 - \sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}^{-1}.$$

b) För en diagonalmatris

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

gäller att dess heltalspotenser ges av

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

I vårt fall betyder det att

$$\begin{aligned}
 A^n &= PD^nP^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^{n+1} & 2\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^{n+1} \end{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

där

$$a_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n (\sqrt{5}+1) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n (\sqrt{5}-1)$$

$$b_n = -2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

c) Använder vi resultatet i deluppgift b får vi att

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} a_n + b_n \\ a_{n+1} + b_{n+1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned}
 f_n &= \frac{a_n + b_n}{2\sqrt{5}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n (\sqrt{5}+1-2) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n (\sqrt{5}-1+2) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right].
 \end{aligned}$$