Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning 2, 2013-01-08, kl. 08.00 – 13.00.

SF1663 Tillämpad linjär algebra med numeriska metoder, för CFATE.

Examinator: Lars Filipsson

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift i del A bedöms antingen som godkänd eller underkänd. Varje uppgift i del B ger maximalt 4 poäng. För godkänt krävs att alla uppgifter på del A är godkända och minst 6 poäng på del B.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa.

Ett resultat på 7 poäng eller mer på kontrollskrivning 2 ger 4 poäng på uppgift 5 på del B, som därmed inte behöver lösas.

Del A

1. För att testa en numerisk rutin vill man generera ett stort antal 3×3-matriser A som alla har de tre egenvärdena -2, 1 och 3.

   a) Ställ upp tre determinantvillkor som tillsammans avgör om en matris A har dessa egenvärden.

   b) Skriv ett Matlab-program som går igenom alla 3×3-matriser vars element är heltal mellan -2 och 2 och skriver ut de matriser som uppfyller villkoren i deluppgift a.

2. Formulera om nedanstående meningar så att de blir korrekta.

   a) Ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ saknar lösning eftersom $\det A = 0$.

   b) Att vektorerna $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ är en bas för $\mathbf{R}^3$ betyder att de är vinkelräta och linjärt oberoende.

   c) Om tre vektorer i $\mathbf{R}^3$ är linjärt beroende så är de parallella.

   d) En matris A är diagonaliserbar då A:s egenvärden är linjärt oberoende.

V.g. vänd!

3. En linjär avbildning i $\mathbf{R}^3$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -9 & 3 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

och tre linjärt oberoende egenvektorer $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (2, 1, 1)$ och $\boldsymbol{u}_3 = (1, 3, 1)$. Skriv upp en diagonalisering av A.

4. En elliptisk dubbelkon i $\mathbf{R}^3$ har ekvationen $4x^2 + y^2 - yz - y = 0$.

   a) Visa att z-axeln ligger på konen.

   b) Konen skär planet $y = 1$ längs en parabel. Ange två punkter på denna parabel.

   c) Konen skär planet $z = 1$ längs en ellips. Bestäm ellipsens huvudaxelriktningar och längden på stor- resp. lillaxeln.

Del B

5. Givet vektorerna

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= (2, 1, -2, 0), \\ \boldsymbol{u}_2 &= (1, 3, 1, -1), \\ \boldsymbol{u}_3 &= (0, 1, 3, 1). \end{aligned}$$

   a) Visa att vektorerna $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$ är linjärt oberoende. (2 p)

   b) Bestäm en vektor $\boldsymbol{u}_4$ så att $B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ är en bas för $\mathbf{R}^4$ och vektorn $\boldsymbol{v} = (1, 3, 2, 0)$ har koordinater $(1, 1, 3, -2)$ i denna bas. (2 p)

6. Hyperbeln $x^2 - xy - 2y^2 = 2$ i $\mathbf{R}^2$ har linjerna $x - y = 0$ och $x + 2y = 0$ som asymptoter.

   a) Bestäm en bas B för $\mathbf{R}^2$ som har basvektorer som är parallella med asymptoterna. (2 p)

   b) Bestäm hyperbelns ekvation i basen B. (2 p)

7. En linjär avbildning i rummet $\mathbf{R}^3$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 1 \\ 5 & 1 & -5 \\ -5 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestäm två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, där $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$, sådana att $\boldsymbol{u}$ avbildas på $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{v}$ avbildas på $\boldsymbol{u}$ med den linjära avbildningen. (4 p)

8. I sitt verk *Liber Abaci* studerade Leonardo Fibonacci (ca. 1170–1250) ett exempel med en tänkt kaninpopulation som förökar sig enligt följande regler:

   1. Varje kaninpar får ett nytt kaninpar varje månad.
   2. Det tar en månad innan det nyfödda kaninparet kan föda ytterligare ett par.
   3. Inga kaniner dör eller tillkommer på annat sätt.

   Om vi startar med ett nyfött kaninpar så blir antalet kaninpar efter en given månad,

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \ldots$$

   där varje tal i denna s.k. *fibonacciföljd* är summan av de två föregående talen.

   Om f_n betecknar det n:te fibonaccitalet i följden så kan talföljden skrivas med följande rekursionsformel

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \text{för heltal } n \geq 2\,,$$

   med begynnelsevillkoren $f_0 = 0$ och $f_1 = 1$.

   Denna rekursionsformel kan också formuleras i matrisform som

$$\begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

   och genom att använda matrisformeln upprepade gånger får vi att

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   osv.

   vilket i slutändan ger att

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (2 p)

   b) Använd diagonaliseringen, $A = PDP^{-1}$, från deluppgift a för att beräkna $A^n = PD^nP^{-1}$. (1 p)

   c) Bestäm en formel för f_n uttryckt i n. (1 p)