



**KTH Elektro-  
och systemteknik**

## **Tentamen i 2C1118 Systemplanering, 8 juni 2007, 8:00–13:00, V34**

### **Tillåtna hjälpmedel**

Vid denna tentamen får följande hjälpmedel användas:

- Miniräknare utan information med anknytning till kursen.
- En **handskriven, enkelsidig** A4-sida med **egna** anteckningar (original, ej kopia).  
Denna sida skall lämnas in tillsammans med tentamen.



## DEL I (OBLIGATORISK)

Skriv alla svar på det bifogade svarsbladet. Några motiveringar eller beräkningar behöver inte redovisas.

Del I kan totalt ge 40 poäng. Godkänt betyg garanteras vid 35 poäng. Om resultatet på del I uppgår till minst 32 poäng ges möjlighet att vid en extra skrivning komplettera till godkänt betyg (3).

### Uppgift 1 (4 p)

Besvara följande teorifrågor genom att välja *ett* alternativ, som du anser är korrekt.

**a) (2 p)** Med förhandshandeln avser vi all handel som sker före själva leveranstimmen (eller någon annan handelsperiod). På förhandsmarknaden kan man handla med följande typer av kontrakt: I) Självbetjäningkontrakt, d.v.s. då kunden abonnerar på en viss maximal effekt och under kontraktets giltighetstid får köpa valfri mängd energi per handelsperiod, så länge den maximala effekten inte överskrider, II) Fastkraft, d.v.s. då en säljaren förbinder sig att leverera en viss mängd energi i varje handelsperiod under kontraktets giltighetstid, III) Reglerkraft, d.v.s. då en aktör på begäran av systemoperatören tillför systemet mer effekt (uppreglering) eller då en aktör på begäran av systemoperatören tar ut mer effekt från systemet (nedreglering).

1. Inget av påståendena är sanna.
2. Endast I är sant.
3. Endast II är sant.
4. Endast III är sant.
5. I och II är sanna men inte III.

**b) (1 p)** Betrakta en producent som mellan 10 och 11 producerar enligt plan, med undantag för att man kl. 10:45 på systemoperatörens begäran verkställer ett nedregleringsbud på 200 MW. Vilken realtidshandel har detta bolag genomfört under denna timme?

1. Bolaget har köpt 50 MWh reglerkraft av systemoperatören.
2. Bolaget har sålt 50 MWh reglerkraft till systemoperatören.
3. Bolaget har sålt mer än 50 MWh reglerkraft till systemoperatören.

**c) (1 p)** Betrakta ett balansansvarigt bolag som under en viss timme producerat 876 MWh, sålt 400 MWh till elbörsen, sålt 458 MWh till kunder med självbetjäningkontrakt och sålt 20 MWh reglerkraft till systemoperatören. Vilka förpliktelser har bolaget i efterhandshandeln till denna timme?

1. Bolaget måste köpa balanskraft av systemoperatören.
2. Bolaget måste sälja balanskraft till systemoperatören.
3. Inga alls – det är frivilligt för balansansvariga att delta i efterhandshandeln.

## Uppgift 2 (6 p)

Antag att man på elmarknaden i Land har perfekt konkurrens, alla aktörer har perfekt information, samt att det inte finns några nät- eller effektbegränsningar. Vattenmagasinen i Land kan maximalt lagra 60 TWh. Den 1 januari innehåller vattenmagasinen totalt 20 TWh och enligt långtidsprognoserna för elmarknaden (vilka som sagt var antas vara felfria) ska magasinen innehålla 25 TWh den 31 december. Tillrinningen är 150 TWh mellan 1 januari och 30 juni och 55 TWh mellan 1 juli och 31 december. Den rörliga produktionskostnaden i vattenkraften är försumbar.

Förutom vattenkraft finns det även kolkondenskraftverk i Land. Kolkondensen kan producera 50 TWh mellan 1 januari och 30 juni och lika mycket mellan 1 juli och 31 december. Sambandet mellan elpris och kolkondensproduktion antas vara linjärt; om elpriset är 400  $\text{€}/\text{MWh}$  eller lägre producerar inte kolkondenskraftverken någonting och om elpriset är 500  $\text{€}/\text{MWh}$  eller högre producerar de så mycket som möjligt.

Elförbrukningen i Land är inte priskänslig och uppgår till 130 TWh mellan 1 januari och 30 juni och 120 TWh mellan 1 juli och 31 december.

- a) (2 p)** Vilket elpris skulle man få på elmarknaden i Land om det *inte* fanns någon magasinbegränsning, d.v.s. om vattenmagasinen hade oändlig lagringskapacitet?
- b) (2 p)** Hur mycket skulle vattenmagasinen innehålla natten mellan 30 juni och 1 juli vid midnatt om det *inte* fanns någon magasinbegränsning, d.v.s. om vattenmagasinen hade oändlig lagringskapacitet?
- c) (1 p)** Vilket elpris får man mellan 1 januari och 30 juni om man tar hänsyn till magasinbegränsningen?
- d) (1 p)** Vilket elpris får man mellan 1 juli och 31 december om man tar hänsyn till magasinbegränsningen?

### Uppgift 3 (6 p)

**a) (2 p)** Betrakta ett elsystem vid ett tillfälle då frekvensen ligger stabilt på 49,97 Hz. I detta läge uppstår ett fel i en transformatorstation och ett kraftverk som producerar 500 MW kopplas bort från nätet. Vilket av följande alternativ beskriver vad som händer i systemet?

1. Det uppstår ett överskott av energi, vilket leder till att spänningen höjs i elnätet. Reglersystemet i de kraftverk som deltar i primärregleringen svarar på spänningsökningen genom att minska elproduktionen.
2. Det uppstår ett överskott av energi, vilket leder till att spänningen sänks i elnätet. Reglersystemet i de kraftverk som deltar i primärregleringen svarar på spännings-sänkningen genom att minska elproduktionen.
3. Det uppstår ett underskott av energi, vilket leder till att spänningen höjs i elnätet. Reglersystemet i de kraftverk som deltar i primärregleringen svarar på spänningsökningen genom att öka elproduktionen.
4. Det uppstår ett underskott av energi, vilket leder till att frekvensen sjunker i systemet. Reglersystemet i de kraftverk som deltar i primärregleringen svarar på frekvenssänkningen genom att öka elproduktionen.
5. Det uppstår ett underskott av energi, vilket leder till att frekvensen stiger i systemet. Reglersystemet i de kraftverk som deltar i primärregleringen svarar på frekvensökningen genom att öka elproduktionen.

**b) (2 p)** Betrakta ett elsystem som är indelat i två områden, A och B. Det finns endast en transmissionsförbindelse mellan dessa två områden. Denna förbindelse utgörs av en 220 kV växelströmsledning med en maximal överföringskapacitet på 600 MW. Ledningen är försedd med skyddssystem som efter en viss tidsfördröjning kopplar bort ledningen om den maximala kapaciteten överskrids.

Vid ett visst tillfälle överförs 500 MW från område A till B. Vid detta tillfälle ökar lasten i område B med 150 MW. Reglerstyrkan i område A är 2 000 MW/Hz och reglerstyrkan i område B är lika stor. Hur stor blir överföringen från område A till område B efter att primärregleringen återställt balansen mellan produktion och konsumtion? (Svara 0 MW om förbindelsen kopplas bort p.g.a. överbelastning.)

**c) (2 p)** Ett visst kraftverk har en reglerstyrka på 100 MW/Hz. Basproduktionen (d.v.s. produktionen då frekvensen är exakt 50 Hz) är 80 MW och kraftverket har en installerad effekt på 90 MW. Hur mycket kommer kraftverket att producera då frekvensen i systemet är 49,88 Hz?

## Uppgift 4 (12 p)

Stads energi AB äger ett termiskt kraftverk med tre block. Dessutom äger man en vindkraftpark. Antag att bolaget formulerat sitt korttidsplaneringsproblem som ett MILP-problem och att man har infört följande beteckningar:

Index för kraftverken: Block I - 1, Block II - 2, Block III - 3.

$$\begin{aligned}C_g^+ &= \text{startkostnad i kraftverk } g, g = 1, 2, 3, \\D_t &= \text{avtalad last timme } t, t = 1, \dots, 24, \\G_{g,t} &= \text{elproduktion i kraftverk } g, \text{ timme } t, g = 1, 2, 3, t = 1, \dots, 24, \\G_g &= \text{installerad effekt i kraftverk } g, g = 1, 2, 3, \\G_g &= \text{minimal elproduktion då kraftverk } g \text{ är i drift, } g = 1, 2, 3, \\s_{g,t}^+ &= \text{startvariabel för kraftverk } g, \text{ timme } t, g = 1, 2, 3, t = 1, \dots, 24, \\u_{g,0} &= \text{driftstatus i kraftverk } g \text{ vid planeringsperiodens början, } g = 1, 2, 3, \\u_{g,t} &= \text{driftstatus i kraftverk } g, \text{ timme } t, g = 1, 2, 3, t = 1, \dots, 24, \\W_t &= \text{förväntad vindkraftproduktion timme } t, t = 1, \dots, 24, \\beta_{Gg} &= \text{rörlig produktionskostnad i kraftverk } g.\end{aligned}$$

**a) (3 p)** Vilka av beteckningarna ovan representerar optimeringsvariabler respektive parametrar?

**b) (4 p)** Antag att den förväntade vindkraftproduktionen alltid är lägre än den avtalade lasten. Hur ska då Stads energi AB:s lastbalansvillkor för timme  $t$  formuleras? Använd beteckningarna ovan.

**c) (3 p)** Vid installerad effekt producerar vattenkraftverket Fallet 100 MW och produktionsekvivalentsvärdet är då 0,5 MWh/TE. Magasinet rymmer 12 960 000 m<sup>3</sup>. Antag att kraftverken uppströms varken tappar eller spiller något vatten och att det lokala tillflödet är försumbart. Om man börjar med ett fullt magasin, hur många timmar kan man då producera installerad effekt i Fallet innan magasinet är tomt?

**d) (2 p)** Antag att korttidsplaneringsproblemet för tre vattenkraftverk formulerats som ett LP-problem där målfunktionen är att maximera värdet av sparat vatten. Optimeringsproblemet har sedan lösts med hjälp kommersiell programvara (t.ex. GAMS). Låt  $v_{i,t}$  beteckna dualvariabeln till den hydrologiska balansen för kraftverk  $i$ , timme  $t$ . I följande situationer kan man vara säker på att det är något fel med den lösning man erhållit: I) Om något  $v_{i,t} < 0$ , II) Om något  $v_{i,t} = 0$ , III) Om kraftverket  $j$  ligger direkt nedströms kraftverk  $i$  och  $v_{j,t} > v_{i,t}$ .

1. Inget av påståendena är sant.
2. Endast I är sant.
3. Endast II är sant.
4. Endast III är sant.
5. Alla påståendena är sanna.

## Uppgift 5 (12 p)

**a) (2 p)** Betrakta en elmarknad med tre kraftverk. I en stokastisk produktionskostnadssimulering av denna elmarknad har man fått fram följande värden på den icke-levererade energin:

$$\begin{aligned} EENS_0 &= 420 \text{ MWh/h}, EENS_1 = 195 \text{ MWh/h}, \\ EENS_2 &= 34,8 \text{ MWh/h}, EENS_3 = 5,01 \text{ MWh/h}. \end{aligned}$$

Vad får man för *ETOC* i systemet om samtliga kraftverk har en produktionskostnad på 10  $\text{€}/\text{MWh}$ ?

**b) (2 p)** Man har beräknat följande varaktighetskurva för den ekvivalenta lasten inklusive bortfall i de tre kraftverken:

$$\tilde{F}_3(x) = \begin{cases} 1 & x < 400, \\ 0,4168 & 400 \leq x < 500, \\ 0,2710 & 500 \leq x < 650, \\ 0,0766 & 650 \leq x < 750, \\ 0,0280 & 750 \leq x < 900, \\ 0,0064 & 900 \leq x < 1\,000, \\ 0,0010 & 1\,000 \leq x < 1\,150, \\ 0,0002 & 1\,150 \leq x < 1\,250, \\ 0 & 1\,250 \leq x, \end{cases}$$

Vad har systemet för *LOLP* om varje kraftverk har en installerad effekt på 250 MW?

**c) (2 p)** Antag att det fanns ytterligare ett kraftverk i systemet och att detta kraftverk har en installerad effekt på 200 MW, tillgänglighet 80% och driftkostnad 12  $\text{€}/\text{MWh}$ . I vilket intervall är  $\tilde{F}_4(x)$  lika med 0,30016?

**d) (6 p)** Samma elmarknad har även simulats med Monte Carlo-teknik. Den modell som använts i Monte Carlo-simuleringen är något mer avancerad än den modell som används i en stokastisk produktionskostnadssimulering, och tar bl.a. hänsyn till att en del konsumenter är priskänsliga. För att få ett noggrant resultat från Monte Carlo-simuleringen har man valt att använda stratifierad sampling.

Resultaten från de femton första scenarierna i Monte Carlo-simuleringen finns sammanställda i tabell 1. Vilka skattningar av *ETOC* och *LOLP* får man utifrån dessa resultat?

**Tabell 1** Resultat från en Monte Carlo-simulering av en elmarknad.

Stratum	Stratumvikt	Observationer av <i>TOC</i> [ $\text{€}/\text{h}$ ]	Observationer av <i>LOLO</i>
1	0,9	3 500, 5 000, 4 500, 3 000, 4 000	0, 0, 0, 0, 0
2	0,09	5 250, 5 500, 7 500, 5 500, 6 250	0, 0, 1, 0, 0
3	0,01	7 500, 7 500, 7 500, 5 000, 7 500	1, 1, 1, 1, 1

## DEL II (FÖR HÖGRE BETYG ÄN GODKÄNT)

Alla beteckningar som införs skall förklaras. Lösningarna skall vara så utförliga att det utan problem går att följa tanke- och beräkningsgången.

Svaren på de olika uppgifterna skall lämnas in på olika blad, men svar på deluppgifter (a, b, c, o.s.v) kan skrivas på samma blad. Fälten *Namn*, *Blad nr* och *Uppgift nr* skall fyllas i på varje blad.

Del II kan ge totalt 60 poäng. Del II kommer endast att rättas om tentanden erhållit minst 35 poäng på del I. Om så är fallet summeras resultatet på del I, del II och bonuspoängen. Denna summa ligger till grund för vilket betyg (3, 4, 5) som ges på tentamen.

### Uppgift 6 (10 p)

Unionen har fyra medlemsländer: Åland, Beland, Celand och Deland. Data för den gemensamma elmarknaden i Unionen ges i tabell 2. De rörliga produktionskostnaderna antas vara linjära i de angivna intervallen, d.v.s. då produktionen är noll är priset på den lägsta nivån och vid maximal produktion är priset maximalt.

**Tabell 2** Data för Unionens gemensamma elmarknad.

Kraftslag	Produktionskapacitet [TWh/år]				Rörlig kostnad [€/MWh]	CO <sub>2</sub> -utsläpp [ton/MWh]
	Åland	Beland	Celand	Deland		
Vattenkraft	60	115	15	–	6–7	0
Vindkraft	4	4	2	10	10	0
Kärnkraft	80	–	20	–	80–120	0
Biobränsle	10	–	15	5	100–250	0
Fossilgas	–	–	10	30	200–360	0,4
Kolkondens	5	–	30	10	220–400	1,0
Elförbrukning	150	120	90	40		

Antag att det på den gemensamma elmarknaden råder perfekt konkurrens, perfekt information och att det inte finns några nät-, magasins-, eller effektbegränsningar. Antag dessutom att Unionen inför ett system för handel med utsläppsrätter, som innebär att producenterna måste köpa en utsläppsrätt för varje ton CO<sub>2</sub> de släppt ut under året. Utsläppsrätterna handlas på en separat marknad, vilket betyder att det kommer att finnas ett marknadspris på utsläppsrätter. Detta marknadspris beror på hur många utsläppsrätter som elproducenterna efterfrågar, så som visas i tabell 3. Uppskatta elpriset på Unionens gemensamma elmarknad under dessa förutsättningar.

**Tabell 3** Priset på utsläppsrätter.

Elmarknadens efterfrågan [miljoner utsläppsrätter]	Pris [€/utsläppsrätt]
0–30	100
30–45	130
45–55	160
55–65	200



## Uppgift 7 (10 p)

Elsystemet i Rike är uppdelat i två delar. I den norra delen av systemet finns stora mängder vattenkraft, men huvuddelen av lasten ligger i den södra delen. Mellan de två områdena finns ett flertal parallella växelströmsledningar. Det maximala flödet från norr till söder på dessa ledningar är 7 000 MW – om man överskrider denna gräns blir elsystemet instabilt och man riskerar omfattande strömavbrott i hela eller delar av elsystemet. För att undvika detta tillåter man vid nominell frekvens endast ett sammanlagt flöde på 6 000 MW. Den utnyttjade överföringskapaciteten är reserverad för frekvensreglering.

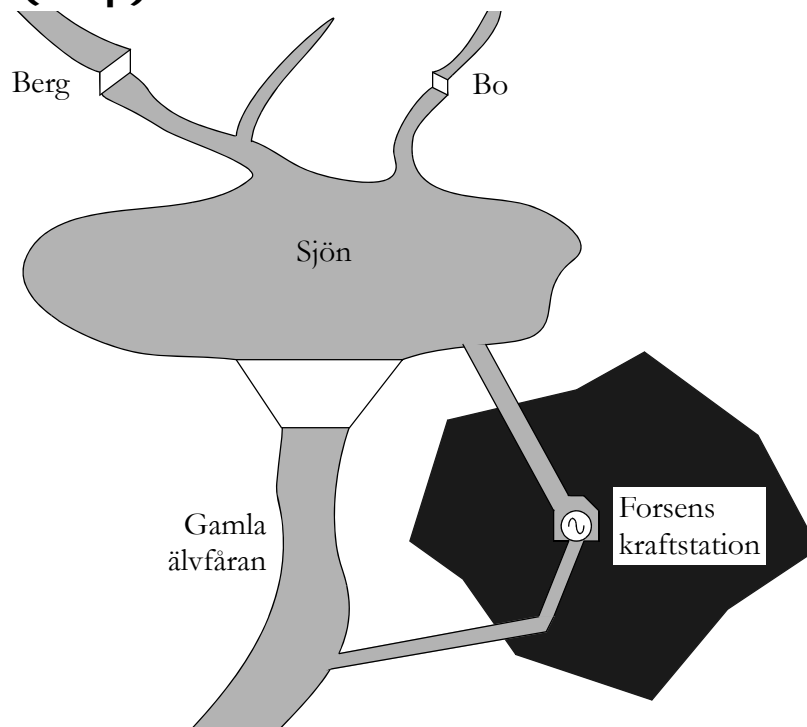
Riksnät är systemoperatör i Rike och har ansvaret för frekvensregleringen. Den primärregleringskapacitet som Riksnät upphandlar är uppdelad i två delar: dels vanlig primärregleringskapacitet och dels en momentan störningsreserv. Den vanliga primärregleringskapaciteten ska vara tillgänglig inom frekvensintervallet 49,9 till 50,1 Hz och har en reglerstyrka på totalt 3 000 MW/Hz, varav 2 000 MW/Hz kommer från kraftverk i den norra delen av Rike. Den momentana störningsreserven ska vara tillgänglig inom frekvensintervallet 49,5 till 49,9 Hz och ska vara så stor att systemet vid normal drift (d.v.s. då frekvensen varierar mellan 49,9 och 50,1 Hz) klarar ett bortfall i det största kraftverket utan att man överbelastar förbindelsen mellan den norra och södra delen av landet.

**a) (5 p)** Det största kraftverket i Rike är ett kärnkraftverk, beläget i södra delen av Rike, med en installerad effekt på 1 400 MW. Hur stor reglerstyrka måste den momentana störningsreserven ha om man ska vara säker på att man vid normal drift klarar ett bortfall i detta kraftverk utan att frekvensen sjunker mer än till 49,5 Hz?

**b) (5 p)** Hur stor del av den momentana störningsreserven måste vara förlagd till den södra delen av Rike?

*Tips:* Tänk på att en del av överföringskapaciteten från norr till söder kan vara utnyttjad av den vanliga primärregleringen!

## Uppgift 8 (20 p)



AB Vattenkraft äger tre vattenkraftverk lokaliserade som i figuren ovan. Berg och Bo är småskaliga strömkraftverk. Kraftverket Forsen är byggt under jorden och vattnet leds genom tunnlar till och från turbinen. Sjön fungerar som vattenmagasin för Forsen och den gamla älvfåran används som spillväg. Eftersom kraftverket ligger i ett naturområde som är populärt bland fotvandrare och fritidsfiskare har miljödomstolen ålagt AB Vattenkraft att upprätthålla ett flöde på minst  $10 \text{ m}^3/\text{s}$  i den gamla älvfåran. Övriga data för kraftverken framgår av tabell 4.

AB Vattenkraft planerar att sälja sin elproduktion på den lokala elbörsen ElKräng. Man antar att man kan sälja så mycket man önskar till de priser som anges i tabell 5, som också visar den förväntade lokala tillrinningen. Sparat vatten antas kunna användas till elproduktion vid den bästa marginella produktionsekvivalenten i respektive kraftverk och framtida elproduktion är värderad till 210 SEK/MWh. Rinntiden mellan kraftverken kan försummas.

**a) (12 p)** Formulera AB Vattenkrafts planeringsproblem som ett LP-problem. För parametrarna ska beteckningarna i tabell 6 användas (det är dock även tillåtet att lägga till ytterligare beteckningar om man anser att det behövs).

OBS! För att få full poäng på denna uppgift krävs att

- Beteckningarna för optimeringsvariablerna ska vara klart och tydligt definierade.
- Optimeringsproblemet ska vara så formulerat att man tydligt kan se vad som är målfunktion, vad som är bivillkor och vad som är variabelgränser.
- Möjliga värden för alla index ska finnas tydligt angivet vid alla ekvationer.

**b) (8 p)** Antag att man vill använda en bättre modell av elproduktionen som funktion av tappningen i Forsen. Tappning under 50 TE ger dålig verkningsgrad och orsakar dessutom vibrationer som förkortar turbinens livslängd väsentligt. Därför vill man använda en modell som tillåter att kraftverket tas ur drift (d.v.s. att man inte tappar något vatten genom turbinen), men som i övrigt inte tillåter att tappningen understiger 50 TE. Tappningar över 50 TE ska delas upp i tre linjära segment. De brytpunkter man har valt mellan de linjära segmenten framgår av tabell 7.

Hur måste planeringsproblemet från a-uppgiften formuleras om för att ta hänsyn till den förbättrade modellen av Forsen? Glöm inte att definiera alla nya variabler och parametrar du inför!

**Tabell 4** Data för AB Vattenkrafts kraftverk.

Kraftverk	Installerad effekt [MW]	Produktionsekvivalent [MWh/TE]	Maximal tappning [TE]	Maximalt magasininnehåll [TE]	Startinnehåll i vattenmagasin [TE]
Berg	5,5	0,10	55	–	–
Bo	3,2	0,08	40	–	–
Forsen	50	0,5	100	4 000	2 500

**Tabell 5** Prognos för planeringsperioden.

Timme	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12
Pris på ElKräng [SEK/MWh]	193	189	180	175	175	192	202	222	233	233	232	229
Lokal tillrinning [TE]												
Berg	49	49	51	55	59	57	52	48	46	45	45	45
Bo	28	30	33	37	35	32	27	25	25	25	25	25
Forsen	11	11	12	12	14	12	11	10	10	10	10	10
Timme	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Pris på ElKräng [SEK/MWh]	222	212	209	206	202	200	200	203	203	206	207	196
Lokal tillrinning [TE]												
Berg	45	45	47	47	48	47	46	44	42	41	40	40
Bo	25	25	25	25	29	32	28	24	23	23	23	23
Forsen	10	10	10	10	11	11	11	9	9	9	9	9

**Tabell 6** Beteckningar till AB Vattenkrafts planeringsproblem.

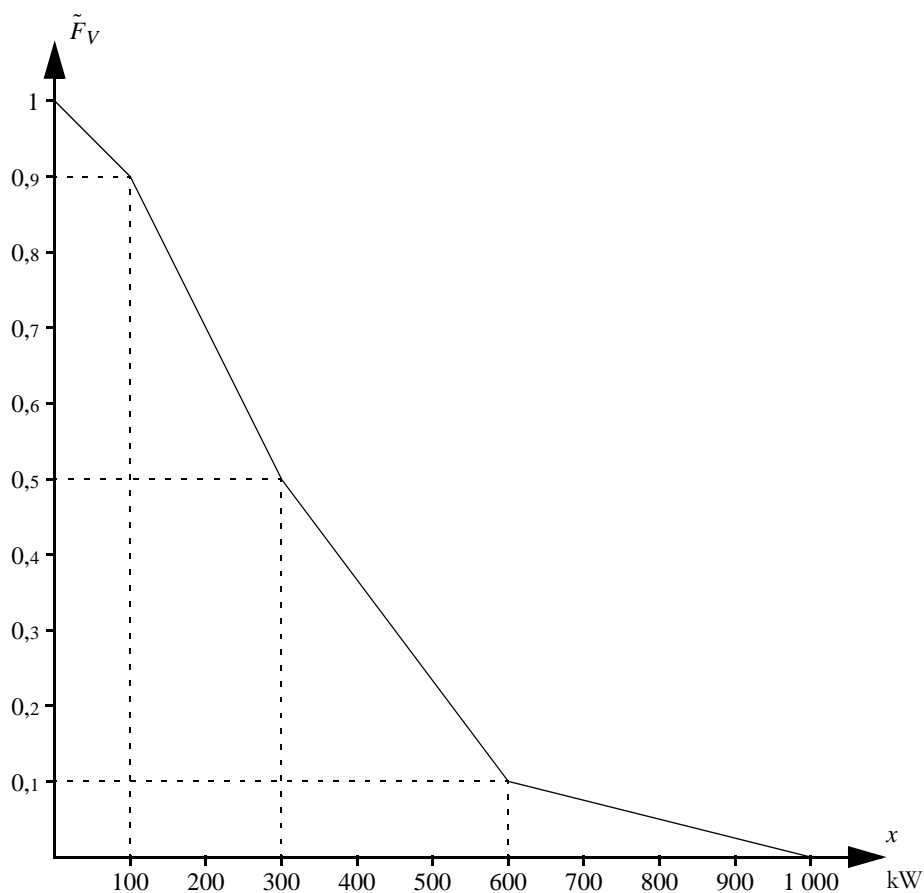
Beteckning	Förklaring	Värde
$\bar{H}_i$	Installerad effekt i kraftverk $i$	Se tabell 4
$\gamma_i$	Produktionsekvivalent i kraftverk $i$	Se tabell 4
$\bar{Q}_i$	Maximal tappning i kraftverk $i$	Se tabell 4
$M_{i,0}$	Startinnehåll i magasin $i$	Se tabell 4
$\bar{M}_i$	Maximalt innehåll i magasin $i$	Se tabell 4
$\lambda_t$	Förväntat pris på ElKräng timme $t$	Se tabell 5
$V_{i,t}$	Lokal tillrinning till kraftverk $i$ , timme $t$	Se tabell 5
$S_{\text{älv}}$	Minsta tillåtna vattenflöde i gamla älvfåran förbi Forsen	10
$\lambda_f$	Förväntat framtida elpris	210

**Tabell 7** Elproduktion i Forsen.

Brytpunkt	Tappning, $Q$ [TE]	Elproduktion, $H$ [MWh/TE]	Kommentar
1	50	23,7	Lägsta tillåtna tappning då kraftverket är i drift.
2	65	30,9	Lokalt bästa verkningsgrad
3	80	39,6	Bästa verkningsgrad
4	100	50,0	Maximal tappning.

## Uppgift 9 (20 p)

Ute i Atlanten ligger den lilla vulkanön Isla Desierta. Elförbrukningen på ön kan antas vara normalfördelad med medelvärdet 600 kW och en standardavvikelse på 100 kW. Elförsörjningen sköts av ett lokalt elbolag, Electricidad de Isla Desierta (EdID). Bolaget kan importera el från fastlandet, via en växelströmsledning med 100% tillgänglighet. Denna ledning är enkelriktad, d.v.s. det går bara att överföra effekt från fastlandet till Isla Desierta och inte åt andra hållet. Ledningen har en kapacitet på 1 000 kW och EdID betalar 1  $\text{€}$ /kWh för importerad el. Bolaget har även ett eget vattenkraftverk på ön. Detta vattenkraftverk har en kapacitet på 500 kW, tillgängligheten är 100% och driftkostnaden är försumbar. Vattenkraftverket saknar magasin, så den maximala elproduktionen är begränsad av vattenflödet, som beror av nederbörd och hur mycket vatten som flödar fram ur öns vulkaniska källor. En varaktighetskurva för det tillgängliga vattenflödet,  $V$  (omräknat till kW), visas i figuren nedan. Vattenflödet kan antas vara oberoende av vilken last man har i systemet.



**a) (5 p)** Ställ upp en diskret modell av den tillgängliga produktionskapaciteten i vattenkraftverket. Modellen ska ha tre tillstånd: ingen produktionskapacitet tillgänglig, installerad effekt tillgänglig, samt ett tillstånd däremellan. Glöm inte att motivera dina beräkningar!

**b) (5 p)** Använd modellen från a-uppgiften och stokastisk produktionskostnadssimulering för att beräkna EdID:s förväntade driftkostnad. För att förenkla beräkningarna kan du använda följande approximation av lastens varaktighetskurva:

$$\tilde{F}_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 500, \\ 0,4 & 500 \leq x < 750, \\ 0 & 750 \leq x. \end{cases}$$

Om du inte har löst a-uppgiften kan du använda följande modell av vattenkraftverket: 50% chans att installerad effekt är tillgänglig, 40% chans att halva den installerade effekten är tillgänglig och 10% chans att ingen produktionskapacitet är tillgänglig.

**c) (3 p)** Antag att man vill simulera EdID:s system med hjälp av Monte Carlo-teknik. Hur bör man på bästa sätt modellera den tillgängliga produktionskapaciteten i vattenkraftverket? Glöm inte att motivera ditt svar!

**d) (1 p)** Hur många slumpstal behövs för att generera ett scenario i en Monte Carlo-simulering av EdID:s system?

**e) (6 p)** Använd ett lämpligt antal slumpstal ur tabell 8 för att generera ett scenario till en Monte Carlo-simulering av EdID:s system. Ange också vilka komplementära scenarier som kan härledas från samma slumpstal.

*Tips:* För en symmetrisk sannolikhetsfördelning gäller att om  $X = \mu + \delta$ , där  $\mu = E[X]$  och  $\delta$  är ett godtyckligt tal, så är slumpstalskomplementet  $X^* = \mu - \delta$ .

**Tabell 8** Några slumpstal till en Monte Carlo-simulering av EdID:s system.

Fördelning	$U(0, 1)$	$N(600, 100)$
Slumptal	0,95	595
	0,25	725
	0,60	675



KTH Elektro-  
och systemteknik

## Svarsblad till del I

Namn: .....

Personnummer: .....

### Uppgift 1

a) Alternativ ..... är korrekt.

b) Alternativ ..... är korrekt.

c) Alternativ ..... är korrekt.

### Uppgift 2

a) .....  $\alpha$ /MWh

b) ..... TWh

c) .....  $\alpha$ /MWh    d) .....  $\alpha$ /MWh

### Uppgift 3

a) Alternativ ..... är korrekt.

b) ..... MW    c) ..... MW

### Uppgift 4

a) Parametrar: .....

Optimeringsvariabler: .....

b) .....

c) ..... timmar.

d) Alternativ ..... är korrekt.

### Uppgift 5

a) .....  $\alpha$ /h

b) ..... %

c) .....  $\leq x <$  .....

d) *ETOC* .....  $\alpha$ /h    *LOLP* ..... %

### Uppgift 1

- a) 5, b) 1, c) 1.

### Uppgift 2

- a) Den totala lasten i Land under året är 250 TWh. Tillrämningen och startinnehållet i vattenmagasinen uppgår tillsammans till 225 TWh, men eftersom man ska spara 25 TWh till nästa år kan vattenkraften endast producera 200 TWh. Övriga 50 TWh måste komma från kolkondensen, vilket betyder att man utnyttjar hälften av kolkondenskapaciteten. Priset måste därför vara 450  $\square$ /MWh.
- b) Under första halvåret produceras 25 TWh kolkondens, vilket betyder att vattenkraften ska producera 105 TWh, samtidigt som tillrämningen är 150 TWh. Således fylls magasinen på med 45 TWh under denna period. Eftersom magasinet från början innehöll 20 TWh skulle det då innehålla 65 TWh i slutet av perioden.
- c) Från b-uppgiften kan vi dra slutsatsen att vattenmagasinen kommer att vara helt fyllda den 30 juni. För att man ska slippa spilla vatten kommer vattenkraften att producera totalt 110 TWh mellan 1 januari och 30 juni, vilket innebär att kolkondensen måste producera 20 TWh under samma period. Detta innebär att man utnyttjar 40% av kolkondenskapaciteten och därmed måste elpriset vara 440  $\square$ /MWh.
- d) Under perioden 1 juli till 31 december har vattenkraften tillgång till 60 TWh (sparat vatten från föregående halvår) + 55 TWh (tillrämning) = 25 TWh (vatten som sparas till nästa år) = 90 TWh, vilket innebär att kolkondensen måste producera 30 TWh under samma period. Detta innebär att man utnyttjar 60% av kolkondenskapaciteten och därmed måste elpriset vara 460  $\square$ /MWh.

### Uppgift 3

- a) 4.
- b) Eftersom reglerstyrkan är densamma kommer produktionsökningen att bli lika stor i de båda områdena. I område B har lasten ökat med 150 MW, men produktionen ökar endast med 75 MW, vilket betyder att de resterande 75 MW måste importeras från A. Överföringen från A till B måste därför öka till 575 MW, vilket är fullt möjligt.
- c) Sambandet mellan frekvens och elproduktion ger att kraftverket skulle producera
- $$G = G_0 - R(f - f_0) = 80 - 100(49,88 - 50) = 92 \text{ MW},$$

vilket inte är möjligt. Kraftverket kommer i stället att producera så mycket som möjligt, d.v.s. 90 MW.

### Uppgift 4

- a) Parametrar:  $C_g^+$ ,  $D_r$ ,  $\bar{C}_g$ ,  $\bar{C}_g$ ,  $u_g$ ,  $u_g$ ,  $W_i$  och  $\beta_{CG}$ . Optimeringsvariabler:  $C_{g,r}$ ,  $s_{g,r}^+$  och  $u_{g,r}$ .

$$b) \sum_{g=1}^3 G_{g,r} + W_r = D_r.$$

- c) Tappningen vid installerad effekt ges av sambandet  $Q = H/\rho Q = 100/0,5 = 200 \text{ TE}$ . Eftersom magasinet rymmer 12 960 000/3 600 = 3 600 TE, så räcker ett fullt magasin till 18 timmars maximal produktion.
- d) 2.

### Uppgift 5

- a) Den totala produktionen i de tre kraftverken ges av  $(EENS_0 - EENS_1) + (EENS_1 - EENS_2) + (EENS_2 - EENS_3) = EENS_0 - EENS_3 = 420 - 501 = 414,99 \text{ MWh/h}$ . Den förväntade driftkostnaden blir då  $ETOC = 10 \cdot 414,99 = 4 149,9 \text{ } \square/\text{h}$ .
- b) Risken för effektkostnad ges av  $LOLP = \bar{F}_3(750) = 2,8\%$ .
- c) Eftersom  $\bar{F}_4(x) \geq \bar{F}_3(x) \forall x$ , så måste den undre gränsen för intervallet vi söker vara åtminstone 500 MW. Med hjälp av följningsformeln kan vi beräkna  $\bar{F}_4(x)$  för  $x \geq 500$  tills vi hittar det sökta intervalllet:

$$\bar{F}_4(x) = 0,8\bar{F}_3(x) + 0,2\bar{F}_3(x - 200) = \begin{cases} \dots & \dots \\ 0,8 \cdot 0,271 + 0,2 \cdot 1 = 0,271 & 500 \leq x < 600, \\ 0,8 \cdot 0,271 + 0,2 \cdot 0,4168 = 0,30016 & 600 \leq x < 650, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

- d) Följande skattningar erhålls av väntevärdet i respektive stratum:

$$\begin{aligned} m_{TOC1} &= 20\ 000/5 = 4\ 000 & m_{LOLO1} &= 0 \\ m_{TOC2} &= 30\ 000/5 = 6\ 000 & m_{LOLO2} &= 1/5 = 0,2 \\ m_{TOC3} &= 35\ 000/5 = 7\ 000 & m_{LOLO3} &= 5/5 = 1 \end{aligned}$$

Alltså får vi

$$m_{TOC} = \sum_{h=1}^3 \omega_h m_{TOCh} = 0,9 \cdot 4\ 000 + 0,09 \cdot 6\ 000 + 0,01 \cdot 7\ 000 = 4\ 210 \text{ } \square/\text{h},$$

$$m_{LOLO} = \sum_{h=1}^3 \omega_h m_{LOLoh} = 0 + 0,09 \cdot 0,2 + 0,01 \cdot 1 = 2,8\%.$$

### Uppgift 6

Låt oss börja med att studera elmarknaden utan att ta hänsyn till priset på utsläppsrätter, så att vi kan få en uppfattning om hur stora utsläppen är från Unionens elproducenter. Den totala efterfrågan uppgår till 400 TWh/år. Vindkraft, vattenkraft, kärnkraft och biobränsle kan totalt bidra med 340 TWh/år, vilket inte är tillräckligt. Således kommer man även att behöva använda fossilgas och kolkondens. Antag att elpriset är  $\lambda$ . För  $\lambda$  i intervallet 220–360  $\square$ /MWh bidrar fossilgasen och kolkondensen med

$$\frac{\lambda - 200}{360 - 200} \cdot 40 + \frac{\lambda - 250}{400 - 220} \cdot 45.$$

Detta bidrag ska vara lika med 60, eftersom övriga kraftslag producerar 340 TWh/år och efterfrågan är 400 TWh/år. Löser man denna ekvation får man elpriset  $\lambda = 330$ , vilket ger ett totalt utsläpp på 40,5 Mton CO<sub>2</sub>.

Med ledning av ovanstående antar vi att en utsläppsrätt kostar 130 €. För fossilgas innebär det att den rörliga produktionskostnaden ökar med  $0,4 \cdot 130 = 52$  €/MWh och för kolkondensen är ökningen 130 €/MWh. Bidraget från dessa två kraftslag ska fortfarande vara 60 TWh, vilket ger följande ekvation:

$$\frac{\lambda - 252}{412 - 252} \cdot 40 + \frac{\lambda - 350}{530 - 350} \cdot 45 = 60.$$

Löser man denna ekvation får man  $\lambda = 421$  €/MWh, men vid detta elpris utnyttjas all fossilgas (40 TWh). Därmed vet vi att kolkondensen ska producera 20 TWh, d.v.s. vi behöver utnyttja 4/9 av kolkondensen. Således måste vi utnyttja 4/9 av prisintervall för kolkondens, vilket ger ett elpris på 430 €/MWh.

Återsstår att kontrollera vårt antagande om priset på utsläppsrätter. Fossilgasen släpper ut 40 TWh · 0,4 ton/MWh = 16 Mton CO<sub>2</sub> och kolkondensen släpper ut 20 Mton. Producenterna kommer med andra ord att behöva införskaffa 36 miljoner utsläppsrätter, vilket enligt tabell 3 ger det antagna priset 130 €/utsläppsrätt.

## Uppgift 7

**a)** Antag att kärnkraftverket kopplas bort i ett läge då den vanliga primärregleringens resurser är uttömda, d.v.s. då frekvensen är 49,9 Hz. Den momentana störningsreserven ska då tillföra 1 400 MW utan att frekvensen blir lägre än 49,5 Hz, vilket kräver en reglerstyrka på 1 400/0,4 = 3 500 MW/Hz.

**b)** Först måste vi beräkna hur stor del av reserverna på förbindelsen mellan nord och syd som den vanliga primärregleringen kan utnyttja. Vid frekvensen 49,9 Hz ökar den vanliga primärregleringen i nord delen sin produktion med 2 000 · 0,1 = 200 MW. I värsta fall måste hela denna ökning överföras till södra delen av Rike. I så fall finns det bara en reserv på 800 MW överföringskapacitet kvar. Om den momentana störningsreserven då ska tillföra 1 400 MW måste uppenbarligen minst 600 MW tillföras i den södra delen. Med andra ord måste störningsreserven i den södra delen ha en reglerstyrka på 600/0,4 = 1 500 MW/Hz.

## Uppgift 8

**a)** Problemet vi vill lösa är

- maximera *intäkterna av såld el + värdet av sparad vatten,*
- med hänsyn till *hydrologisk balans för varje vattenkraftverk,*
- begränsningar i produktionskapacitet, m.m.*

## Index för kraftverken

Berg 1, Bo 2, Forsen 3.

## Parametrar

Parametrarna är definierade i tabell 6 i uppgiftslydsen.

## Optimeringsvariabler

- $Q_{i,t}$  = tappning i kraftverk  $i$  under timme  $t$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $t = 1, \dots, 24$ ,
- $S_{i,t}$  = spill från magasin  $i$  under timme  $t$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $t = 1, \dots, 24$ ,
- $M_{i,t}$  = innehåll i magasin  $i$  vid slutet av timme  $t$ ,  $t = 3, t = 1, \dots, 24$ .

## Målfunktion

$$\text{maximera } \sum_{t=1}^{24} \lambda_t \left( \sum_{i=1}^3 \gamma_i Q_{i,t} \right) + \lambda_f \gamma_3 M_{3,24}$$

## B villkor

Hydrologisk balans för Berg och Bo:

$$Q_{i,t} + S_{i,t} = V_{i,t}$$

$$i = 1, 2, t = 1, \dots, 24.$$

Hydrologisk balans för Forsen:

$$M_{3,t} - M_{3,t-1} + Q_{3,t} + S_{3,t} - \sum_{i=1}^2 (Q_{i,t} + S_{i,t}) = V_{3,t}, \quad t = 1, \dots, 24.$$

## Variabelgränser

- $0 \leq Q_{i,t} \leq \bar{Q}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, t = 1, \dots, 24$ ,
- $0 \leq S_{i,t}$ ,  $i = 1, 2, t = 1, \dots, 24$ ,
- $S_{div} \leq S_{3,t}$ ,  $t = 1, \dots, 24$ ,
- $0 \leq M_{3,t} \leq \bar{M}_3$ ,  $t = 1, \dots, 24$ .

**b)** Låt  $Q_{3,b}$  och  $H_{3,b}$  vara tappning respektive elproduktion vid brytpunkt  $b$  enligt tabell 7. Maximal tappning i varje segment ges då av

$$\bar{Q}_{3,j} = Q_{3,j+1} - Q_{3,j} = \begin{cases} 15 & j = 1, \\ 15 & j = 2, \\ 20 & j = 3. \end{cases}$$

och de marginella produktionskvivalenterna av

$$H_{3,j} = \frac{H_{3,j+1} - H_{3,j}}{\bar{Q}_{3,j}} = \begin{cases} 0,48 & j = 1, \\ 0,58 & j = 2, \\ 0,52 & j = 3. \end{cases}$$

Vi kan nu konstatera att modellen av Forsen kommer att kräva två heltalsvariabler: en för att hantera det förbudna intervallet för tappningen och ytterligare en för att förhindra tappning i segment 2 och 3 innan segment 1 är fullt utnyttjat. Således inför vi följande nya optimeringsvariabler:

$u_{3,t}$  = driftstatus för Forsen under timme  $t$  (1 om kraftverket är i drift, 0 om det inte är i drift),



$z_{3,t}$  = tillåtelse att tappa i segment 2 och 3 (1 om tappning är tillåten i segment 2 och 3, annars 0).

$Q_{3,j,t}$  = tappning i segment  $j$ , timme  $t$ .

Dessutom behöver vi ytterligare två parametrar:

$H_3$  = lägsta elproduktion då Forsen är i drift = 23,7,

$Q_3$  = lägsta tappning då Forsen är i drift = 50,

Den modifierade modellen av elproduktionen i Forsen måste inkluderas i målfunktionen:

$$\text{maximera } \sum_{t=1}^{24} \lambda_t \left( \sum_{j=1}^3 \gamma_j Q_{j,t} + H_3 u_{3,t} + \sum_{j=1}^3 u_{3,j} Q_{3,j,t} \right) + \lambda_{j^*} u_{3,2} M_{3,24}$$

I och med att vi nu har fyra optimeringsvariabler för att representera tappningen i Forsen, måste även det hydrologiska balansvillkoret uppdateras för detta kraftverk:

$$M_{3,t} - M_{3,t-1} + Q_{3,t} + \sum_{j=1}^3 Q_{3,j,t} + S_{3,t} - \sum_{i=1}^3 (Q_{i,t} + S_{i,t}) = V_3, t = 1, \dots, 24.$$

Det är endast tillåtet att tappa i segment 1 då Forsen är i drift, vilket betyder att vi behöver införa följande bivillkor:

$$Q_{3,1,t} \leq \bar{Q}_{3,1} u_{3,t}, \quad t = 1, \dots, 24.$$

Tappning i segment 2 och 3 är endast tillåten då tappningen i segment 1 vara lika med sitt maximala värde. Följande bivillkor ser till att tappningen i segment 1 är maximal då den binära variabeln som tillåter tappning i segment 2 och 3 är lika med ett:

$$\bar{Q}_{3,1} z_{3,t} \leq Q_{3,1,t}, \quad t = 1, \dots, 24.$$

Slutligen ser följande bivillkor till att det inte tappas från segment 2 och 3 om inte  $z_{3,t} = 1$ :

$$j = 2, 3, t = 1, \dots, 24.$$

$$Q_{3,j,t} \leq \bar{Q}_{3,j} z_{3,t}$$

De övre gränserna för tappningsvariablerna sätts av bivillkoren ovan, vilket ger oss följande variabelgränser:

$$u_{3,t} \in \{0, 1\},$$

$$z_{3,t} \in \{0, 1\},$$

$$0 \leq Q_{3,j,t}$$

## Uppgift 9

a) I verkligheten kan den tillgängliga produktionskapaciteten anta vilket värde som helst mellan 0 och 500 kW, men i vår modell har vi bara tre möjliga tillstånd: 0, 250 respektive 500 kW. Frågan är vilken sannolikhet vi ska ge vart och ett av dessa tillstånd. Vi behöver med andra ord en diskret approximation av den kontinuerliga varaktighetskurvan för vattenflödet. En enkel och bra approximation är att låta flöden mellan 0 och 125 kW i den kontinuerliga modellen representeras av det diskreta tillståndet  $\bar{H} = 0$  kW, flöden mellan 125 kW och 375 kW i den kontinuerliga modellen motsvaras av det diskreta tillståndet  $\bar{H} = 250$  kW, och slutligen representeras flöden större än 375 kW av det diskreta tillståndet  $\bar{H} = 500$  kW. Vi får då

$$P(\bar{H} = 0) = P(V < 125) = 1 - \bar{F}_V(125) = \{\text{läs av i figur}\} = 0,15,$$

$$P(\bar{H} = 250) = P(V > 375) - P(V < 125) = \bar{F}_V(125) - \bar{F}_V(375) = \{\text{läs av i figur}\} = 0,45,$$

$$P(\bar{H} = 500) = P(V > 375) = \bar{F}_V(375) = \{\text{läs av i figur}\} = 0,4.$$

Därmed har vi identifierat tre tillstånd för vattenkraftverket och beräknat sannolikheten för respektive tillstånd, vilket är vad som behövs till en kraftverksmodell i en stokastisk produktionskostnadsmodellering.

b) ETOC beror av kostnaden för att importera el från fastlandet. Vi behöver med andra ord beräkna EENS med respektive utan importen. Eftersom vattenkraftverket har lägst driftkostnad lägger vi in det först:

$$\bar{F}_1(x) = 0,4\bar{F}_0(x) + 0,45\bar{F}_0(x - 250) + 0,15\bar{F}_0(x - 500) = \begin{cases} 0,4 \cdot 1 + 0,45 \cdot 1 + 0,15 \cdot 1 = 1 & x < 500, \\ 0,4 \cdot 0,4 + 0,45 \cdot 1 + 0,15 \cdot 1 = 0,76 & 500 \leq x < 750, \\ 0,4 \cdot 0 + 0,45 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 1 = 0,33 & 750 \leq x < 1\,000, \\ 0,4 \cdot 0 + 0,45 \cdot 0 + 0,15 \cdot 0,4 = 0,06 & 1\,000 \leq x < 1\,250, \\ 0 & 1\,250 \leq x. \end{cases}$$

Elimporten kan betraktas som ett 100% tillgängligt kraftverk med en kapacitet på 1 000 kW, d.v.s.  $\bar{F}_2(x) = \bar{F}_1(x)$ . Vi får således

$$EENS_1 = \int_{500}^{\infty} \bar{F}_1(x) dx = 250 \cdot 0,76 + 250 \cdot 0,33 + 250 \cdot 0,06 = 287,5 \text{ kWh/h},$$

$$EENS_2 = \int_{1\,500}^{\infty} \bar{F}_2(x) dx = 0 \text{ kWh/h}.$$

Den förväntade importen är  $EENS_1 - EENS_2 = 287,5$  kWh/h, vilket ger ETOC = 287,5  $\rho$  /h.

c) I Monte Carlo-simuleringen behövs ingen diskret approximation av vattenkraftverket. För att beräkna den tillgängliga produktionskapaciteten i ett visst scenario behöver man bara slumpa fram ett vattenflöde utifrån den givna varaktighetskurvan.

d) I varje scenario har vi två scenarioparametrar (d.v.s. värden som varierar slumpmässigt från scenario till scenario): tillgängligt vattenflöde och elförbrukning. Således behöver vi två slumpal för att generera ett scenario.

e) Antag att det första slumptalet från  $U(0, 1)$ -fördelningen används för att generera vattenflödet och att det första slumptalet från  $N(600, 100)$ -fördelningen används för att generera den totala lasten.

Vattenflödet erhålls med hjälp av inversa transformmetoden:  $V = F_V^{-1}(0,95) = \{\text{läs av i figur}\} = 500$  kW. Slumpalskomplementet till detta värde ges av  $V^* = F_V^{-1}(1 - 0,95) = \{\text{läs av i figur}\} = 800$  kW. Vi får med andra den tillgängliga produktionskapaciteten  $\bar{H} = 500$  kW respektive  $\bar{H}^* = 500$  kW (man kan inte överskrida den installerade effekten i kraftverket även om vattenflödet är tillräckligt stort för att producera mer än 500 kW).

Lasten ges direkt av det första slumptalet från normalfördelningen:  $D = 595$  kW. Eftersom normalfördelningen är symmetrisk har vi då  $D^* = 605$  kW.

Dessa slumpal och deras slumpalskomplement kan kombineras ihop till fyra scenarier:

- **Scenario 1.** Tillgänglig vattenkraftkapacitet: 50 kW. Last: 595 kW.
- **Scenario 2.** Tillgänglig vattenkraftkapacitet: 50 kW. Last: 605 kW.
- **Scenario 3.** Tillgänglig vattenkraftkapacitet: 500 kW. Last: 595 kW.
- **Scenario 4.** Tillgänglig vattenkraftkapacitet: 500 kW. Last: 605 kW.