KTH Teknikvetenskap

SF1664 Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder
Lösningsförslag till Tentamen 2 2012-12-11

(1) Ge en precis matematisk förklaring av vad som menas med en Riemann-summa.

Lösning. Se Persson och Böiers bok, sid 299-300. □

Svar:

(2) Betrakta integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$.
A. Beräkna en approximation av integralen med hjälp av trapetsregeln och steglängden $1/2$.
B. Beräkna integralen exakt med hjälp av variabelsubstitutionen $x^2 = t$.

Lösning. A. Om $f(x) = x/(1+x^4)$ så ger trapetsregeln med steglängd $1/2$ att integralen approximeras av

$$\frac{1}{2}\frac{(f(0)+2f(1/2)+f(1))}{2} = \frac{1}{2}\frac{0+16/17+1/2}{2} = \frac{49}{136}.$$

B. Vi använder substitutionen $u = x^2$, som ger $du = 2xdx$ och de nya gränserna 0 resp 1, och får

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{8}.$$

□

Svar: A. $\dfrac{49}{136}$

B. $\pi/8$

(3) Betrakta differentialekvationen $y'(x) + \frac{1}{2}y(x) = x$ med initialvillkoret $y(0) = 2$.
För $y(x)$ som löser differentialekvationen och uppfyller initialvillkoret, gör följande:
A. Beräkna en approximation av $y(1)$ numeriskt med hjälp av Eulers metod och steglängden $1/2$.
B. Beräkna $y(1)$ exakt genom att lösa differentialekvationen och hitta den lösning som också uppfyller initialvillkoret.

Lösning. A. Vi observerar att vi i första steget ska använda en rät linje genom punkten $(0, 2)$. Riktningskoefficienten fås med hjälp av differentialekvationen till -1 ($y' = -y/2 + x$ där vi har $y = 2$ och $x = 0$). Den räta linjen blir alltså

$$y = -x + 2.$$

Med denna får vi approximationen

$$y(1/2) \approx -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

I andra steget ska vi använda en rät linje genom punkten $(1/2, 3/2)$. Riktningskoefficienten fås med hjälp av differentialekvationen till $-1/4$ ($y' = -y/2 + x$ där vi har $y = 3/2$ och $x = 1/2$). Den räta linjen blir alltså

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{8}.$$

Med denna får vi approximationen

$$y(1) \approx -\frac{1}{4} + \frac{13}{8} = \frac{11}{8}.$$

B. Vi vet att lösningens struktur är $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation och y_p är någon partikulärlösning.

Först söks y_h, allmänna lösningen till $y' + \frac{1}{2}y = 0$. Karaktäristiska ekvationen $r + 1/2 = 0$ har lösning $r = -1/2$, så $y_h(x) = Ce^{-x/2}$, där C är en godtycklig konstant.

Sedan söks y_p, dvs någon partikulärlösning. Eftersom högerledet är x, dvs ett förstagradspolynom, ansätter vi $y_p = Ax + B$. Då är $y_p' = A$. Vi får att y_p satisfierar differentialekvationen om och endast om $A + (1/2)(Ax + B) = x$, vilket är uppfyllt om och endast om $A = 2$ och $B = -4$. Vår partikulärlösning är alltså $y_p(x) = 2x - 4$.

Den allmänna lösningen till differentialekvationen i uppgiften är alltså

$$y(x) = Ce^{-x/2} + 2x - 4,$$

där C är en godtycklig konstant.

Nu ska vi bestämma konstanten C så att även begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ är uppfyllt. Vi ser att $y(0) = C - 4$ så $y(0) = 2$ är ekvivalent med att $C = 6$.

Den funktion som uppfyller både differentialekvationen och initialvillkoret är alltså

$$y(x) = 6e^{-x/2} + 2x - 4$$

och vi ser att

$$y(1) = 6e^{-1/2} - 2 = \frac{6}{\sqrt{e}} - 2.$$

□

Svar: A. $11/8$ B. $6e^{-1/2} - 2$

(4) Betrakta funktionen $f(x) = \ln(1-x)$.
A. Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring punkten origo alltså) av grad 3 till f.
B. Om $f(x)$ approximeras med $p(x)$ i intervallet $0 \leq x \leq 1/10$, är det då sant att absolutbeloppet av felet är mindre än 10^{-3}?

Lösning. A. Vi deriverar och får $f'(x) = -(1-x)^{-1}$, $f''(x) = -(1-x)^{-2}$, $f'''(x) = -2(1-x)^{-3}$ och $f^{(4)}(x) = -6(1-x)^{-4}$. Det betyder att $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = -2$ och därför är det sökta Taylorpolynomet

$$p(x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

B. Enligt Taylors formel är

$$|f(x) - p(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4\right| = \frac{6}{4!(1-c)^4}x^4$$

för något tal c mellan 0 och x. Om x ligger i intervallet $0 \leq x \leq 1/10$ så gäller därför att

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4 \cdot 0.9^4} \cdot 0.1^4 \leq 10^{-3}.$$

□

Svar: A. $p(x) = -x - x^2/2 - x^3/3$ B. JA

DEL B

(5) Beräkna nedanstående integraler.

A. $\displaystyle\int_0^1 \tan x \, dx.$

B. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x} \, dx.$

Lösning. A. Eftersom $\tan x = \sin x / \cos x$ är det lämpligt att använda substitutionen $u = \cos x$ med $du = -\sin x dx$ (gränserna övergår i 1 resp $\cos 1$) och vi får

$$\int_0^1 \tan x \, dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int_1^{\cos 1} \frac{-du}{u} = [-\ln u]_1^{\cos 1} = -\ln \cos 1.$$

B. Vi använder partiell integration och får

$$\int_0^\infty xe^{-x} \, dx = \lim_{R \to \infty} \int_0^R xe^{-x} \, dx = \lim_{R \to \infty} \left([-xe^{-x}]_0^R + \int_0^R e^{-x} \right) = 1.$$

□

Svar: A. $\ln \cos 1$ B. 1.

(6) Funktionen $F(x) = \dfrac{mgR^2}{x^2}$ beskriver, för $x \geq R$, jordens dragningskraft på en kropp med massan m på avståndet x från jordens medelpunkt (g är tyngdaccelerationen och R jordens radie). Om man försummar luftmotståndet, hur stort arbete krävs för att föra massan m från jordytan och ut i rakt ut i rymden, dvs mycket långt bort från jordens medelpunkt?
(Dela in sträckan i små bitar. Från fysiken vet vi att vid konstant kraft och rak väg ges arbetet av kraften (i vägens riktning) gånger sträckan.)

Lösning. Massan ska förflyttas sträckan från R till ∞. Dela in sträckan i små bitar. På en liten bit av längd dx vid punkten x är kraften ungefär konstant och lika med mgR^2/x^2. Arbetet vid förflyttningen sträckan dx är då $(mgR^2/x^2)dx$. Hela arbetet fås genom summation till

$$\int_R^\infty \frac{mgR^2}{x^2}\,dx = \lim_{X\to\infty} \int_R^X \frac{mgR^2}{x^2}\,dx = \lim_{X\to\infty} [-mgR^2/x]_R^X = mgR.$$

$\square$

Svar: mgR

(7) En matematisk modell för en plan pendel (en punktformig massa upphängd i en tunn tråd av längd L meter) ges av differentialekvationen

$$y''(t) + \frac{g}{L} \sin y(t) = 0,$$

där $y(t)$ är utslagsvinkeln i radianer vid tiden t och g är tyndaccelerationen. För små y kan man göra approximationen $\sin y \approx y$ och då får man den betydligt enklare differentialekvationen

$$(*) \qquad y''(t) + \frac{g}{L} y(t) = 0.$$

A. Förklara kort varför man kan göra approximationen $\sin y \approx y$ för små vinklar y. Hur stort är felet i den approximationen?
B. Bestäm $y(t)$ med hjälp av $(*)$ om pendeln vid startögonblicket (då $t = 0$) har utslagsvinkeln 0.3 radianer och hastigheten 0 m/s.

Lösning. A. Med hjälp av Taylors formel (där vi Taylorutvecklar $\sin y$ kring origo) får vi att

$$\sin y = y + \frac{-cosc}{3!} y^3,$$

för något tal mellan 0 och y. Det betyder att $\sin y \approx y$ med ett fel som till absolutbeloppet är $(\cos c/3!)y^3$ vilket är mindre än $y^3/6$.

B. Diffekvationen är linjär, homogen med konstanta koefficienter. Karaktäristiska ekvationen $r^2 + g/L = 0$ har lösning $r = \pm i\sqrt{g/L}$ så diffekvationens allmänna lösning är

$$y(t) = A \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t + B \sin \sqrt{\frac{g}{L}} t.$$

Derivatan av detta är: $y'(t) = \sqrt{\frac{g}{L}} (-A \sin \sqrt{\frac{g}{L}} t + B \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t).$

Vid $t = 0$ ska utslagsvinkeln vara 0.3 rad och hastigheten 0: detta ger initialvillkoren $y(0) = 0.3$ och $y'(0) = 0$. Det senare, $y'(0) = 0$ ger att $B = 0$. Insättning av detta i uttrycket för y och användande av det första villkoret ger att $A = 0.3$.

□

Svar: $y(t) = 0.3 \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t$

(8) I en punkt på kurvan $y = e^{-x}$, $x \geq 0$, dras en tangent till kurvan. Koordinataxlarna bildar tillsammans med tangenten en triangel. Vilken är den största area en sådan triangel kan ha? *(Ur Persson och Böiers: Övningar i analys i en variabel)*

Lösning. A. Låt $f(x) = e^{-x}$. Då är $f'(x) = -e^{-x}$. Om vi drar tangenten i den punkt på kurvan då x-koordinaten är a och y-koordinaten e^{-a}, så har tangenten lutning $f'(a) = -e^{-a}$. Tangentens ekvation blir då

$$y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a).$$

Denna tangent skär y-axeln i punkten $(0, (a+1)e^{-a})$ och x-axeln i punkten $(1 + a, 0)$..

Arean A av den triangel som bildas beror på vilken punkt på kurvan man utgick ifrån, dvs är en funktion av a. Vi har att

$$A(a) = \frac{(a+1)^2 e^{-a}}{2}.$$

Vi ser att $A(0) = 1/2$ och $\lim_{a\to\infty} A(a) = 0$. Vi deriverar och får

$$A'(a) = \frac{1}{2}\frac{(2(a+1)e^{-a} - (a+1)^2 e^{-a})}{2},$$

som existerar för alla $a > 0$. Vi ser att i intervallet $a > 0$ gäller att $A'(a) = 0 \iff a = 1$. För $0 < a < 1$ är $A'(a) > 0$ så A är växande här och för $a > 1$ är $A'(a) < 0$ så A är avtagande här. Största värdet måste alltså tas då $a = 1$ och är $A(1) = 2e^{-1}$ $\square$

Svar: Max area är $A(1) = 2/e$